Optimisation
Devoir maison

Total : 17pts
Date de début: Jeudi 25 Avril
Date de fin: Vendredi 10 Mai

Augustin Cosse
augustin.cosse@univ-littoral.fr

Avril 2024

Question 1 (6pts) *L'optimisation sur les entiers s'effectue sur la grille $\mathbb{Z}^n$ pour laquelle il n'existe pas de méthode d'optimisation efficace. Étant donné un problème d'optimisation sur les entiers, il est cependant possible d'en étudier des relaxations. Pour le problème sur les entiers $\max\left\{\boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x}|\boldsymbol{x}\in P\cap\mathbb{Z}^n\right\}$ où P est un polytope régulier $P=\left\{\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^n_+|\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}\leq\boldsymbol{b}\right\}$, la relaxation est donnée par $\max\left\{\boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x}|\boldsymbol{x}\in P\right\}$. La relaxation est donc plus facile à résoudre que le problème de départ (i.e. elle peut notamment être résolue par l'algorithme du simplexe). La principale difficulté est que la solution de cette relaxation n'est plus nécessairement une solution entière. Parmi les relaxations existantes d'un problème entier donné, il est cependant possible de définir une relaxation dont tous les points extrêmes sont des solutions entières. Pour définir une telle relaxation, on se base sur l'enveloppe convexe de l'ensemble admissible de départ. Étant donné un ensemble de points $P\cap\mathbb{Z}^n$, l'enveloppe convexe est le plus petit ensemble convexe contenant tous les points de $P\cap\mathbb{Z}^n$.*

1. *(4pts) On considère l'ensemble $P\cap\mathbb{Z}^2$ où P est le polytope défini par les contraintes suivantes*

$$\begin{aligned} y &\leq 3+2x/3\\ y &\leq 8-5x/3\\ y &\geq 1-0.63x\\ y &\geq 0.72x-1.58 \end{aligned} \tag{1}$$

Représenter P, ainsi que son enveloppe convexe.

2. *(2pts) On souhaite maintenant résoudre le problème suivant:*

$$\max\left\{y-x/10\mid(x,y)\in P\cap\mathbb{Z}^2\right\} \tag{2}$$

Déterminer la solution optimale de ce problème (justifier)

Question 2 (6pts) *Dans l'exercice précédent, on a vu que l'on pouvait déterminer la solution d'un problème d'optimisation sur les entiers en se basant sur l'enveloppe convexe de l'ensemble admissible. Dans le cas d'un problème à deux dimensions, il est relativement facile de définir cette enveloppe. Pour un problème de plus grande dimension, cette enveloppe devient rapidement beaucoup plus complexe. Afin de déterminer la solution entière il est cependant possible de procéder comme suit:*

- *Résoudre la relaxation* $\max\left\{\boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x}|\boldsymbol{x}\in P\right\}$ *en négligeant donc complètement la contrainte d'intégralité* ($\boldsymbol{x}\in\mathbb{Z}^n$).
- *Tant que l'algorithme du simplexe retourne une solution qui n'est pas entière, déterminer une nouvelle contrainte linéaire qui sépare (i.e. qui retire) la solution non entière du polytope de départ.*

Afin de définir ces nouvelles inégalités linéaires, on se base sur le point suivant. Étant donné une contrainte linéaire

$$2x_1+\frac{1}{63}x_2\leq\frac{121}{21} \tag{3}$$

définie pour des solutions entières, on peut toujours en déduire la contrainte obtenue en arrondissant les coefficients à l'entier inférieur

$$2x_1=\lfloor 2\rfloor x_1+\lfloor\frac{1}{63}\rfloor x_2\leq\frac{121}{21} \tag{4}$$

de la même manière, étant donné que l'on recherche des solutions entières, la contrainte reste valide si on arrondi la borne supérieure. I.e. pour tout $x_1\in\mathbb{Z}$ *on a nécessairement*

$$2x_1\leq\lfloor\frac{121}{21}\rfloor=5 \tag{5}$$

Et on peut donc ajouter la contrainte $x_1\leq 5/2$ *à l'ensemble de départ. La procédure résultante est connue sous le nom de procédure de Chvátal-Gomory. Notons qu'étant donné une contrainte linéaire, on peut aussi toujours diviser la contrainte par n'importe quelle valeur réelle positive avant de lui appliquer la procédure de Chvátal-Gomory. Pour chacune des inégalités ci-dessous, déterminer, en utilisant la procédure de Chvátal-Gomory, une inégalité qui, une fois ajoutée à l'ensemble* X *permet de le séparer de la solution non entière* $\boldsymbol{x}^*$ *tout en ne perdant aucun des points de l'ensemble de départ:*

1. *(2pts)* $X=\left\{\boldsymbol{x}\in\mathbb{Z}_+^5\mid 9x_1+12x_2+8x_3+17x_4+13x_5\geq 50\right\}$ *pour* $\boldsymbol{x}^*=(0,25/6,0,0,0)$
2. *(2pts)* $X=\left\{\boldsymbol{x}\in\mathbb{Z}_+^4\mid 4x_1+8x_2+7x_3+5x_4\leq 33\right\}$ *pour la solution* $\boldsymbol{x}^*=(0,0,33/7,0)$
3. *(2pts)* $X=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}_+^2\times B^1\mid x_1+x_2\leq 2y, x_j\leq 1 \text{ pour } j=1,2\right\}$ *où* $B^d=\{0,1\}^d$*, représente l'ensemble des vecteurs de dimension* d *de coordonnées* $(0,1)$*, et* $\boldsymbol{x}^*=(x_1,x_2,y)=(1,0,0.5)$

4. *(2pts)* $X = \{(x, y) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{Z}_+ \mid x \leq 9, x \leq 4y\}$ *avec* $\boldsymbol{x}^* = (x, y) = (9, 9/4)$

Question 3 (5pts) *Étant donné un problème général de la forme* $\max\left\{\boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x}|\boldsymbol{x} \in P \cap \mathbb{Z}^n\right\}$ *où P représente un polytope, la procédure de Chvátal-Gomory peut être combinée avec l'algorithme du simplexe afin de déterminer la solution optimale d'un problème linéaire sur les entiers comme suit:*

1. *On commence par résoudre le problème* $\max\left\{\boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x}|\boldsymbol{x} \in P\right\}$ *à l'aide du simplexe*

2. *Si la solution retournée par le simplexe n'est pas entière, il existe une contrainte de la forme*

$$x_i + \sum_{j \notin B} a_{ij} x_j = b_j \tag{6}$$

où B représente l'ensemble des variables de base et $b_j \notin \mathbb{Z}$. A partir de cette contrainte, on peut générer une nouvelle inégalité de la forme

$$x_i + \sum_{j \notin B} \lfloor a_{ij} \rfloor x_j \leq \lfloor b_j \rfloor \tag{7}$$

On peut ensuite combiner cette contrainte avec la contrainte de départ

$$x_i + \sum_{j \notin B} a_{ij} x_j = b_j \tag{8}$$

$$-\left(x_i + \sum_{j \notin B} \lfloor a_{ij} \rfloor x_j \leq \lfloor b_j \rfloor\right) \tag{9}$$

pour obtenir l'inégalité

$$\sum_{j \notin B} a_{ij} x_j - \sum_{j \notin B} \lfloor a_{ij} \rfloor x_j \geq b_j - \lfloor b_j \rfloor \tag{10}$$

qui est nécessairement violée par la solution du simplexe étant donné que toutes les variables hors base sont nulles et que $b_j - \lfloor b_j \rfloor \neq 0$. On peut donc rajouter cette contrainte au problème de départ et relancer le simplexe. L'algorithme résultant est connu sous le nom d'algorithme des coupes de Gomory.

Soit le polytope $P = \{\boldsymbol{x}|x_2 - x_1/3 \leq 5,\ x_2 + 1.2x_1 \leq 8,\ x_1 - x_2 \leq 3\}$. *Déterminer le maximum de $y + x/10$ sur $P \cap \mathbb{Z}^2$ en utilisant l'algorithme des coupes de Gomory.*