Examen ING1-AGRO EILCO - Analyse Numérique
Session de rattrapage

Juin 2023

Nom :
Prénom :

Total : 29 points
Durée : 2h
Instructions générales : L'examen comprend 2 parties (Chacune de ces parties reprenant différentes sous-questions). Vous êtes libres de rédiger vos réponses sur des pages supplémentaires en veillant toutefois à bien indiquer le numéro de chaque question. Une fois l'examen terminé, Assurez vous de bien écrire votre nom (de façon lisible) sur chacune des pages. Répondez à un maximum de questions, en commençant par les questions qui vous semblent les plus abordables.

Partie 1 (Interpolation et quadrature – 14pts)

1. [5pts] *Indiquer si les affirmations suivantes sont vraies ou fausses*

Vrai / Faux	*Supposons que l'on dispose de* $n+1$ *points* $(x_0, y_0), (x_1, y_1), \ldots, (x_n, y_n)$. *Le polynôme d'interpolation passant par ces points est déterminé de manière unique.*
Vrai / Faux	*Le polynôme d'interpolation de Lagrange aux points* $(x_1, f(x_1))$ *et* $(x_2, f(x_2))$ *est donné par* $p(x) = \dfrac{(x_1 - x_2)}{(x - x_2)} f(x_1) + \dfrac{(x_2 - x_1)}{(x - x_1)} f(x_2)$
Vrai / Faux	*On considère le tableau des différences divisées de Newton donné à la table 1. On souhaite utiliser ce tableau afin de déterminer les coefficients du polynôme d'interpolation* $p_2(x) = a_1 + a_2(x-3) + a_3(x-3)(x-4)$. *Dans ce polynôme, la valeur de* a_2 *est donnée par* $a_2 = 7$
Vrai / Faux	*Les règles du rectangle à gauche et à droite sont exactes pour les fonctions constantes*
Vrai / Faux	*La règle de Simpson est exacte pour les polynômes de degré 2,* $p(x) = ax^2 + bx + c$
Vrai / Faux	*La règle de Simpson est exacte pour les fonctions linéaires,* $f(x) = ax + b$
Vrai / Faux	*La formule de quadrature* $\int_0^1 f(x)\,dx = c_0 f(0) + c_1 f(1)$ *est exacte pour toutes les fonctions constantes et linéaires si* $c_0 = c_1 = 1$

2. [3pts] *On souhaite calculer l'intégrale suivante*

$$\int_0^1 e^{\cos 2\pi x}\,dx = 1.2660659 \tag{1}$$

Afin d'obtenir une approximation de cette intégrale, on procède comme suit :

(a) [1pts] *On commencera par calculer une première approximation à l'aide de la méthode des trapèzes composite en utilisant un pas* $h = 1$

(b) *[2pts] On affinera ensuite cette approximation en se basant sur une règle des trapèzes composite avec un pas* $h = 1/2$

3. *[3pts] Donner l'expression des trois polynômes de Lagrange sur l'intervalle* $[0, 1]$ *(donc pour les points d'interpolation* $0, 1/2, 1$*).*

4. *[3pts] On souhaite déterminer le polynôme* $p(x)$ *de degré au plus 3 satisfaisant les conditions* $p(0) = 0, p(1) = 1, p'(0) = 0, p'(1) = 1$*. Pour ce faire on implémentera chacune des deux approches suivantes :*

   (a) *[2pts] La formule d'interpolation d'Hermite. Pour cette première approche, donner la formule ainsi que le polynôme final d'interpolation (après substitution des valeurs numériques).*

   (b) *[1pts] Une alternative consiste à écrire le système d'équations donné par les contraintes* $p(0) = 0, p(1) = 1, p'(0) = 0, p'(1) = 1$ *pour un polynôme générique de degré 3,* $ax^3 + bx^2 + cx + d$*. Cette approche donne lieu à un système d'équations en les 4 inconnues* a, b, c *et* d*. Pour cette seconde approche, donner et résoudre le système et vérifier que la solution de ce système correspond au polynôme obtenu via la formule d'interpolation d'Hermite.*

x	y			
1	1			
		4		
3	9		1	
		7		0
4	16		1	
		9		
5	25			

TABLE 1 – Schéma de différences divisées utilisé à la question 1.1.

Partie 2 (Transformée de Laplace et transformée de Fourier – 17pts)

1. [5pts] *Indiquer si les affirmations suivantes sont vraies ou fausses*

Vrai / Faux	*La transformée de Laplace est une application linéaire. I.e. pour deux fonctions f et g, on a* $\mathcal{L}\{f+g\} = \mathcal{L}\{f\} + \mathcal{L}\{g\}$
Vrai / Faux	*La fonction* $f(t) = e^{t^2}$ *n'admet pas de transformée de Laplace*
Vrai / Faux	*La transformée de Laplace inverse de* $F(s) = \dfrac{a}{s^2+a^2}$ *est* $\sin(at)$
Vrai / Faux	*Les fonctions* $\sin(nx)$, $n = 1, 2, \ldots$ *et* $\cos(mx)$, $m = 0, 1, 2, \ldots$ *son orthogonales sur* $[0, \pi]$
Vrai / Faux	*La fonction* $f(x) = \dfrac{\sin x}{x}$ *est représentée par une série de Fourier en cosinus*
Vrai / Faux	*La fonction* $f(x) = x\cos x$ *est représentée par une série de Fourier en cosinus*
Vrai / Faux	*Le coefficient d'ordre 0,* a_0*, de la série de Fourier de la fonction* 2π *périodique définie par* $f(t) = t$ *sur* $[0, 2\pi)$ *est* $a_0 = \pi$
Vrai / Faux	*Soit* $\{c_n\}$ *les coefficients de la série de Fourier complexe et* $\{a_n, b_n\}_{n\geq 0}$ *les coefficients de la série de Fourier en cosinus* (a_n) *et sinus* (b_n). *On a* $a_n = c_n + c_{-n}$ *et* $b_n = i(c_n - c_{-n})$
Vrai / Faux	*La transformée de Fourier est définie pour toutes les fonctions*

2. [3pts] *On souhaite montrer que la transformée de Fourier de la fonction*

$$f(t) = e^{-|t-a|} \tag{2}$$

est donnée par

$$F(\omega) = \frac{2e^{-i\omega a}}{1+\omega^2} \tag{3}$$

Pour ce faire, on procédera comme suit :

(a) [1pts] *Donner la définition de la transformée de Fourier*

(b) [1pts] *À l'aide de cette définition, démontrer que pour une fonction $g(t)$ quelconque, on a*

$$\mathcal{F}_\omega\{g(t-a)\} = \mathcal{F}\{g(t)\}\, e^{-2\pi i\omega a} = G(\omega)e^{-2\pi i\omega a} \tag{4}$$

(c) [1pts] *Finalement, calculer la transformée de Fourier de $f(t) = e^{-|t|}$ et en déduire, à l'aide de l'étape précédente, la transformée de $e^{-|t-a|}$*

3. [5pts] *On souhaite calculer la transformée de Laplace du polynôme $p(t) = 3t^5 + 2t^2 + 7$. Pour ce faire, on procédera comme suit :*

(a) [1pt] *Calculer la transformée de Laplace de la fonction $f(t) = 1$*

(b) [1pts] *Calculer la transformée de Laplace de $f(t) = t$*

(c) [2pts] *En utilisant une intégration par partie, exprimer la transformée de Laplace de t^{n+1} á partir de la transformée de Laplace de t^n.*

(d) [1pts] *En déduire la transformée de Laplace du polynôme $p(t)$.*

4. [4pts] *On considère la fonction 2π-périodique $f(x)$ définie par*

$$f(x) = |x|, \quad -\pi \leq x \leq \pi \tag{5}$$

(a) [2pts] *Donner l'expression des coefficients de Fourier de $f(x)$*

(b) [1pt] *En déduire l'expression de la série de Fourier de $f(x)$*

(c) [1pt] *Finalement, déduire de la série de Fourier de $f(x)$ la valeur de la série suivante :*

$$1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{7^2} + \ldots \tag{6}$$