Examen Master MISC - Optimisation des systèmes de l'ingénieur
ULCO/EILCO

Mai 2024

Nom :
Prénom :

Total: 31 points
Durée: 3h
Instructions générales: L'examen comprend 2 parties (Chacune de ces parties reprenant différentes sous-questions). Vous êtes libres de rédiger vos réponses sur des pages supplémentaires en veillant toutefois à bien indiquer le numéro de chaque question. Une fois l'examen terminé, Assurez vous de bien écrire votre nom (de façon lisible) sur chacune des pages. Répondez à un maximum de questions, en commençant par les questions qui vous semblent les plus abordables.

Question 1 (16pts)

1. [5*pts*] *Indiquer si les affirmations suivantes sont vraies ou fausses*

Vrai / Faux	*Tout programme d'optimisation linéaire borné dont l'ensemble admissible est non vide admet une solution optimale*
Vrai / Faux	*La méthode grand M est particulièrement utile pour résoudre des programmes d'optimisation linéaires contenant des contraintes de type* $\boldsymbol{a}^\intercal \boldsymbol{x} \leq b$ *où* $b \geq 0$
Vrai / Faux	*Un ensemble* $X \subset \mathbb{R}^n$ *est convexe si pour tous points* $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in X$, $\lambda \boldsymbol{x} + (1+\lambda)\boldsymbol{y} \in X$
Vrai / Faux	*Le domaine admissible d'un programme d'optimisation linéaire ne se réduit jamais à un point unique*
Vrai / Faux	*En programmation linéaire, si le domaine admissible est non borné, le problème est nécessairement non borné (i.e. la solution optimale est* $\pm\infty$*)*
Vrai / Faux	*Un programme d'optimisation linéaire défini avec des contraintes d'inégalités peut toujours être réécrit comme un programme d'optimisation linéaire défini uniquement à partir de contraintes d'égalité*
Vrai / Faux	*Dans un programme d'optimisation linéaire, si toutes les contraintes sont des contraintes d'égalité, le problème peut être résolu simplement en inversant le système,* $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{b}$.
Vrai / Faux	*Dans un programme d'optimisation linéaire, il peut exister des solutions optimales qui ne sont pas des solutions de base admissibles*

2. [7pts] *On considère le problème suivant:*

$$\begin{array}{rl} \max & 4x_2 + x_1 \\ s.t. & x_2 \geq 2 - x_1 \\ & x_2 \leq 3 + x_1 \\ & 2x_2 \leq 8 + x_1 \\ & 2x_2 \leq -3x_1 + 24 \\ & x_2 \geq 2x_1 - 12 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{array} \tag{P}$$

   (a) [2pts] *Représenter l'ensemble admissible.*

   (b) [2pts] *Résoudre le problème de manière graphique.*

   (c) [1pts] *Quelles sont les contraintes actives/inactives? Justifier*

   (d) [2pts] *Donner (D) le dual de (P)*

3. [4pts] *Une petite compagnie maritime,* Blériot Express*, assure des voyages entre les villes de Calais, Dunkerque et Boulogne. Dans cette question, on se concentre sur les voyages qui partent de Dunkerque, font étape à Calais et arrivent finalement à Boulogne. La compagnie a trois classes de passagers:*

   (a) *Ceux qui voyagent entre Dunkerque et Calais*

   (b) *Ceux qui voyagent entre Calais et Boulogne*

   (c) *Et enfin, ceux qui voyagent entre Dunkerque et Boulogne.*

   L'unique bateau que possède la compagnie est un petit bateau de croisière qui peut transporter jusqu'à 30 passagers. La compagnie offre 3 classes de billets:

   (a) *La classe Y: la classe traditionelle*

   (b) *La classe B: non remboursable*

   (c) *La classe M: non remboursable, pour laquelle les billets doivent être réservés 3 semaines à l'avance*

   Les prix des billets ont été fixés comme indiqués au tableau 1.

   Sur base d'une précédente expérience, les pronostiqueurs ont déterminé un ensemble de bornes sur les nombres de passagers potentiels pour chacune des combinaisons trajets/classes de billet. Les résultats sont repris au tableau 2. L'objectif de la compagnie est de déterminer les nombres de tickets de chacune des neuf combinaisons (trajet,classe de billets) à vendre de façon à maximiser son profit. Aucun des trajets (Dunkerque-Calais, Calais-Boulogne et Dunkerque-Boulogne) ne peut être en surréservation et le nombre de tickets vendus ne peut excéder les estimations des pronostiqueurs.

	Dunkerque-Calais	Calais-Boulogne	Dunkerque-Boulogne
Y	30€	16€	36€
B	22€	13€	28€
M	10€	8€	14€

Table 1: Prix des billets de la compagnie maritime *Blériot Express*

	Dunkerque-Calais	Calais-Boulogne	Dunkerque - Boulogne
Y	4	8	3
B	8	13	10
M	22	20	18

Table 2: Estimations des nombres de voyageurs par les pronostiqueurs pour la compagnie maritime *Blériot Express.*

Question 2 (15pts)

1. [5pts] *Indiquer si les affirmations suivantes sont vraies ou fausses*

Vrai / Faux	*Dans un programme d'optimisation linéaire sur* $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$*, dans le cas d'un problème de minimisation, la solution sera toujours donnée par le sommet le plus bas (dont la coordonnée en* x_2 *est la plus petite) dans l'ensemble admissible.*
Vrai / Faux	*Dans l'algorithme du simplexe, les composantes du vecteur des coûts réduits donnent la variation de la fonction de coût pour une augmentation d'une unité de chacune des variables hors base*
Vrai / Faux	*Tout ensemble convexe peut être représenté par un polyhèdre*
Vrai / Faux	*Dans un ensemble convexe, tout point extrême est aussi un sommet.*
Vrai / Faux	*Pour tout point* $\boldsymbol{x}$ *appartenant à un polyhèdre et qui n'est pas solution de base admissible, il est possible de trouver une direction orthogonale au sous-espace engendré par les contraintes actives au point.*
Vrai / Faux	*Si un polyhèdre ne contient pas de droite, il possède au moins un point extrême.*
Vrai / Faux	*Le problème* $\max \sum_{j=1}^{n} c_j\|x_j\|$ *sous les contraintes* $\sum_{j=1}^{n} a_j\|x_j\| \leq b$ *pour* $c_j, a_j \geq 0$ *peut être réécrit sous la forme d'un programme d'optimisation linéaire.*
Vrai / Faux	*On considère le polyhèdre sous forme standard* $P = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \| \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}, \boldsymbol{x} \geq 0\}$ *On suppose que la matrice* $\boldsymbol{A}$ *est de taille* $m \times n$ *et que ses lignes sont linéairement indépendantes. Si* $n = m + 1$*, alors* P *a au plus deux solutions admissibles.*

2. [2pts] *On dispose du tableau de simplexe suivant (minimisation) pour lequel votre ami vous dit qu'il donne la solution optimale. Expliquer où se trouve l'erreur dans le raisonnement.*

$$\begin{array}{ccccc|cc}
x_1 & x_2 & s_1 & s_2 & s_3 & & \\
-1 & 1 & -1 & 0 & 0 & -2 & x_2 \\
1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 5 & s_2 \\
2 & 0 & 1 & 0 & 1 & 6 & s_3 \\
\hline
3 & 0 & 1 & 0 & 0 & -2 &
\end{array} \tag{1}$$

[2pts] *En supposant que votre ami n'a pas fait d'erreur dans les opérations qu'il a réalisées sur les lignes du tableau, expliquez (sans résoudre le problème) comment vous pouvez l'aider à poursuivre la résolution et donnez le premier tableau résultant.*

3. [2pts] *On considère le disque unité* $D = \left\{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 | x_1^2 + x_2^2 \leq 1\right\}$*. Dériver un ensemble d'inégalités linéaires permettant de représenter* D *de manière arbitrairement précise.*

4. [4pts] *Résoudre le problème suivant en utilisant la méthode du simplexe (Veiller à bien détailler chaque étape)*

$$\begin{array}{lrrrl}
\min & -3x_1 & +x_2 & -2x_3 & \\
s.t. & 2x_1 & -x_2 & & \leq 10 \\
 & x_1 & +2x_2 & -2x_3 & \leq 20 \\
 & & \frac{1}{4}x_2 & +2x_3 & \leq 5 \\
 & x_1, & x_2, & x_3 & \geq 0
\end{array} \tag{2}$$