Corrigé Examen MISC 2024 (Session 1)

# Examen Master MISC - Optimisation des systèmes de l'ingénieur ULCO/EILCO

Mai 2024

| |
|---|
| Nom : |
| Prénom : |

**Total:** 31 points
**Durée:** 3h
**Instructions générales:** L'examen comprend 2 parties (Chacune de ces parties reprenant différentes sous-questions). Vous êtes libres de rédiger vos réponses sur des pages supplémentaires en veillant toutefois à bien indiquer le numéro de chaque question. Une fois l'examen terminé, Assurez vous de bien écrire votre nom (de façon lisible) sur chacune des pages. Répondez à un maximum de questions, en commençant par les questions qui vous semblent les plus abordables.

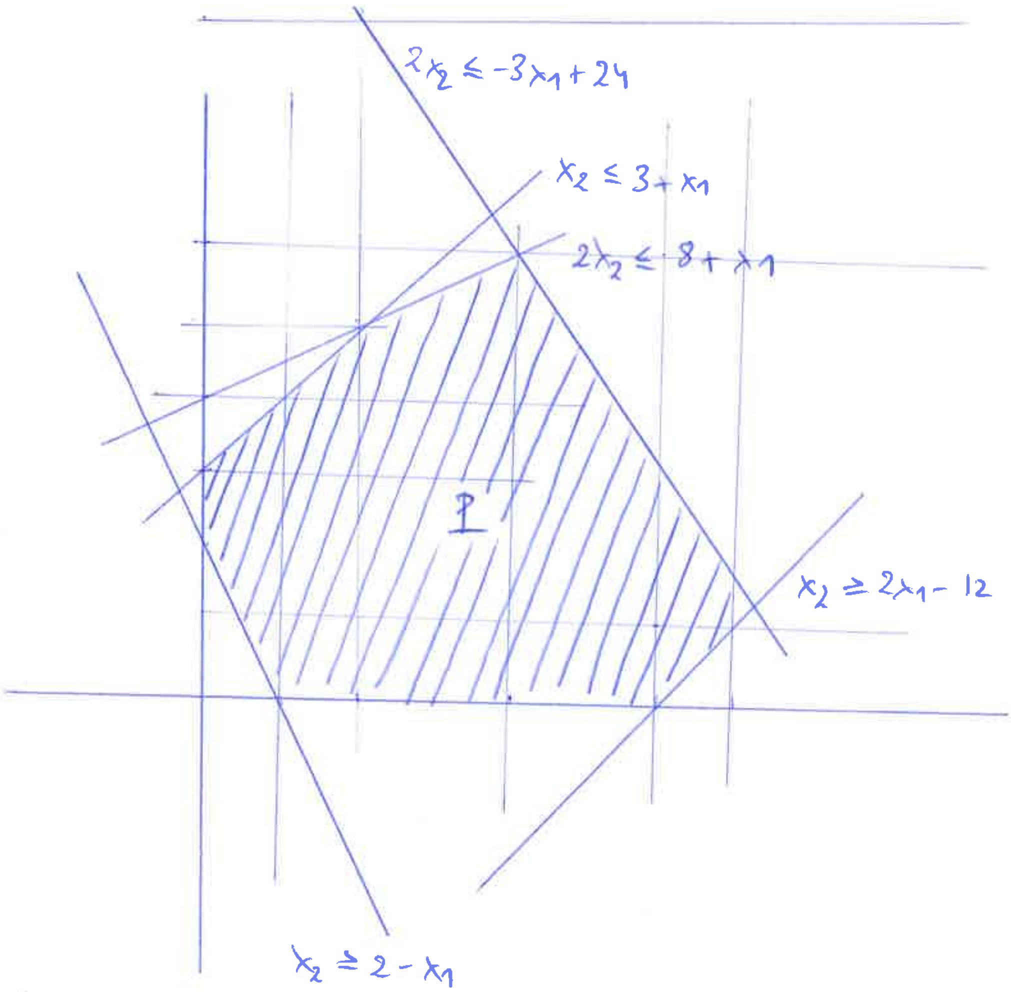
## Question 1 (16pts)

1. [5pts] *Indiquer si les affirmations suivantes sont vraies ou fausses*

| | |
|---|---|
| *Vrai / Faux* | *Tout programme d'optimisation linéaire borné dont l'ensemble admissible est non vide admet une solution optimale* |
| *Vrai / Faux* | *La méthode grand M est particulièrement utile pour résoudre des programmes d'optimisation linéaires contenant des contraintes de type* $\boldsymbol{a}^\intercal \boldsymbol{x} \leq b$ *où* $b \geq 0$ |
| *Vrai / Faux* | *Un ensemble* $X \subset \mathbb{R}^n$ *est convexe si pour tous points* $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in X$, $\lambda \boldsymbol{x} + (1+\lambda)\boldsymbol{y} \in X$ |
| *Vrai / Faux* | *Le domaine admissible d'un programme d'optimisation linéaire ne se réduit jamais à un point unique* |
| *Vrai / Faux* | *En programmation linéaire, si le domaine admissible est non borné, le problème est nécessairement non borné (i.e. la solution optimale est* $\pm\infty$*)* |
| *Vrai / Faux* | *Un programme d'optimisation linéaire défini avec des contraintes d'inégalités peut toujours être réécrit comme un programme d'optimisation linéaire défini uniquement à partir de contraintes d'égalité* |
| *Vrai / Faux* | *Dans un programme d'optimisation linéaire, si toutes les contraintes sont des contraintes d'égalité, le problème peut être résolu simplement en inversant le système,* $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{b}$. |
| *Vrai / Faux* | *Dans un programme d'optimisation linéaire, il peut exister des solutions optimales qui ne sont pas des solutions de base admissibles* |

Solution Examen MISC

Question 1.2




b) la solution dans ce cas est donné par l'intersection des contraintes

$x_2 \leq -\frac{3}{2}x_1 + \frac{24}{2}$ et $x_2 \leq 4 + \frac{x_1}{2}$

$$\begin{cases} x_2 = -\frac{3}{2}x_1 + \frac{24}{2} \\ x_2 = 4 + \frac{x_1}{2} \end{cases} \Rightarrow -\frac{3}{2}x_1 + \frac{24}{2} = 4 + \frac{x_1}{2} \Rightarrow \begin{matrix} x_1 = 4 \\ x_2 = 6 \end{matrix}$$

les contraintes actives sont donc les contraintes $2x_2 \leq -3x_1 + 24$

et $x_2 \leq 3 + x_1$

Solution examen MISC

Question 2 (suite)

Pour rappel, pour le dual, on recherche une combinaison des contraintes du primal qui donne la meilleure borne (supérieure dans le cas d'une maximisation et inférieure dans le cas d'une minimisation) sur la valeur de l'objectif du primal.

Dans le cas d'une maximisation, afin d'obtenir une borne supérieure, on multiplie donc les contraintes de bornes supérieures par des coefficients positifs et les contraintes de bornes inférieures par des coefficients négatifs

En appliquant cette idée, on obtient

$$
\begin{aligned}
4x_2 + x_1 \leq\ & y_1(x_2+x_1) + y_2(x_2-x_1) + y_3(2x_2-x_1) \\
& + y_4(2x_2+3x_1) + y_5(x_2-2x_1) \\
\leq\ & 2y_1 + 3y_2 + 8y_3 + 24y_4 - 12y_5
\end{aligned}
$$

pour $y_1, y_5 \leq 0$ et $y_2, y_3, y_4 \geq 0$. Afin d'obtenir la borne la plus précise possible on minimise la combinaison

$$\min \quad 2y_1 + 3y_2 + 8y_3 + 24y_4 - 12y_5$$

en choisissant les coefficients $y_i$ tels que

$$4 \leq y_1 + y_2 + 2y_3 + 2y_4 + y_5$$

$$1 \leq y_1 - y_2 - y_3 + 3y_4 - 2y_5$$

Solution examen MISC

## Question 2 (suite)

En combinant les remarques précédents, on obtient la formulation

$$\min \quad 2y_1 + 3y_2 + 8y_3 + 24y_4 + 12y_5$$

$$\text{t.q} \quad y_1 + y_2 + 2y_3 + 2y_4 + y_5 \geq 4$$

$$y_1 - y_2 - y_3 + 3y_4 - 2y_5 \geq 1$$

$$y_1, y_5 \leq 0 \qquad y_2, y_3, y_4 \geq 0$$

## Question 3

On introduit 9 variables représentant les nombres de passagers voyageant entre Dunkerque et Calais, Calais et Boulogne, etc pour chacun des billets Y, B et M

$$\begin{array}{ccc} x^Y_{DC} & x^B_{DC} & x^M_{DC} \\ x^Y_{CB} & x^B_{CB} & x^M_{CB} \\ x^Y_{DB} & x^B_{CB} & x^M_{DB} \end{array}$$

La maximisation du profit s'écrit donc

$$\max \quad \begin{array}{l} 30\, x^Y_{DC} + 16\, x^Y_{CB} + 36\, x^Y_{DB} \\ + 22\, x^B_{DC} + 13\, x^B_{CB} + 28\, x^B_{DB} \\ + 10\, x^M_{DC} + 8\, x^M_{CB} + 14\, x^M_{DB} \end{array}$$

Examen MiSC

Question 7.3 (Suite)

les contraintes de bornes par les pronostiqueurs s'écrivent simplement

$$x_{DC}^{Y} \leq 4 \qquad x_{CB}^{Y} \leq 8 \qquad x_{DB}^{Y} \leq 3$$

$$x_{DC}^{B} \leq 8 \qquad x_{CB}^{B} \leq 13 \qquad x_{DB}^{B} \leq 10$$

$$x_{DC}^{M} \leq 22 \qquad x_{CB}^{M} \leq 20 \qquad x_{DB}^{M} \leq 18$$

Finalement les contraintes sur les nombres de passagers imposent que la somme des passagers sur les tronçons Dunkerque → Calais et Calais → Boulogne ne dépassent pas la capacité maximum

On a donc

$$x_{DC}^{Y} + x_{DC}^{B} + x_{DC}^{M} + x_{DB}^{Y} + x_{DB}^{B} + x_{DB}^{Y} \leq 30$$

$$x_{DB}^{Y} + x_{DB}^{B} + x_{DB}^{M} + x_{CB}^{Y} + x_{CB}^{B} + x_{CB}^{M} \leq 30$$

en notant que les nombres de passagers doivent satisfaire des contraintes de positivité

$$x_j^i \geq 0 \quad \forall \; j \in \{DC, CB, DB\}, \; i \in \{Y, B, M\}$$

**Question 2 (15pts)**

1. [5*pts*] *Indiquer si les affirmations suivantes sont vraies ou fausses*

| | |
|---|---|
| Vrai / Faux | *Dans un programme d'optimisation linéaire sur $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$, dans le cas d'un problème de minimisation, la solution sera toujours donnée par le sommet le plus bas (dont la coordonnée en $x_2$ est la plus petite) dans l'ensemble admissible.* |
| Vrai / Faux | *Dans l'algorithme du simplexe, les composantes du vecteur des coûts réduits donnent la variation de la fonction de coût pour une augmentation d'une unité de chacune des variables hors base* |
| Vrai / Faux | *Tout ensemble convexe peut être représenté par un polyhèdre* |
| Vrai / Faux | *Dans un ensemble convexe, tout point extrême est aussi un sommet.* |
| Vrai / Faux | *Pour tout point $x$ appartenant à un polyhèdre et qui n'est pas solution de base admissible, il est possible de trouver une direction orthogonale au sous-espace engendré par les contraintes actives au point.* |
| Vrai / Faux | *Si un polyhèdre ne contient pas de droite, il possède au moins un point extrême.* |
| Vrai / Faux | *Le problème* $\max \sum_{j=1}^{n} c_j \lvert x_j \rvert$ *sous les contraintes* $\sum_{j=1}^{n} a_j \lvert x_j \rvert \leq b$ *pour* $c_j, a_j \geq 0$ *peut être réécrit sous la forme d'un programme d'optimisation linéaire.* |
| Vrai / Faux | *On considère le polyhèdre sous forme standard* $P = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \mid \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}, \boldsymbol{x} \geq 0\}$ *On suppose que la matrice* $\boldsymbol{A}$ *est de taille* $m \times n$ *et que ses lignes sont linéairement indépendantes. Si* $n = m + 1$, *alors* $P$ *a au plus deux solutions admissibles.* |

2. [2*pts*] *On dispose du tableau de simplexe suivant (minimisation) pour lequel votre ami vous dit qu'il donne la solution optimale. Expliquer où se trouve l'erreur dans le raisonnement.*

$$\begin{array}{ccccc|cc} x_1 & x_2 & s_1 & s_2 & s_3 & & \\ -1 & 1 & -1 & 0 & 0 & -2 & x_2 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 5 & s_2 \\ 2 & 0 & 1 & 0 & 1 & 6 & s_3 \\ \hline 3 & 0 & 1 & 0 & 0 & -2 & \end{array} \tag{1}$$

[2*pts*] *En supposant que votre ami n'a pas fait d'erreur dans les opérations qu'il a réalisées sur les lignes du tableau, expliquez (sans résoudre le problème) comment vous pouvez l'aider à poursuivre la résolution et donnez le premier tableau résultant.*

3. [2*pts*] *On considère le disque unité* $D = \left\{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_1^2 + x_2^2 \leq 1\right\}$. *Dériver un ensemble d'inégalités linéaires permettant de représenter $D$ de manière arbitrairement précise.*

4. [4*pts*] *Résoudre le problème suivant en utilisant la méthode du simplexe (Veiller à bien détailler chaque étape)*

$$\begin{array}{llllll} \min & -3x_1 & +x_2 & -2x_3 & \\ s.t. & 2x_1 & -x_2 & & \leq 10 \\ & x_1 & +2x_2 & -2x_3 & \leq 20 \\ & & \frac{1}{4}x_2 & +2x_3 & \leq 5 \\ & x_1, & x_2, & x_3 & \geq 0 \end{array} \tag{2}$$

# Examen MiSC Solution (suite)

## Question 2)

2a) la solution de base n'est pas admissible

i.e on a $x_2 = -2 < 0$

2b) Il suffit de multiplier la contrainte d'egalité par $-1$ et d'ajouter une variable d'écart. On a alors

| $x_1$ | $x_2$ | $s_1$ | $s_2$ | $s_3$ | $a$ | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $+1$ | $-1$ | $+1$ | 0 | 0 | 1 | 2 |
| 1 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 5 |
| 2 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 6 |
| 3 | 0 | 1 | 0 | 0 | $M$ | $-2-M$ |

## Question 3

Bien que le cercle ne soit pas un polytope, il est possible de l'approximer en considérant l'ensemble des equations linéaires données par les tangentes en un sous échantillonnage de points

On prendra par exemple $x \leq 1 \quad x \geq -1 \quad y \leq 1 \quad y \geq -1$

ainsi que
$$x_k = \pm \cos \frac{\pi k}{n} \quad k = 1, \dots, \frac{n}{4} - 1$$
$$y_k = \sin \frac{\pi k}{n}$$

$$x_k = \pm \cos \frac{\pi k}{n} \quad k = 1, \dots, \frac{n}{4} - 1$$
$$y_k = -\sin \frac{\pi k}{n}$$

Examen MISC Solution (suite)

pour les tangente d'equation

$$y \leq -(x - x_k)\tan^{-1}\left(\frac{\pi k}{n}\right) + y_k$$

et $$y \geq -(x - x_k)\tan^{-1}\left(\frac{\pi k}{n}\right) + y_k$$

---

Question 2.4

En ajoutant les variables d'écart, on réecrit le problème

$$\min\ -3x_1 + x_2 - 2x_3$$

$$\text{s.t}\quad 2x_1 - x_2 + S_1 = 10$$

$$x_1 + 2x_2 - 2x_3 + S_2 = 20$$

$$\tfrac{1}{4}x_2 + 2x_3 + S_3 = 5$$

$$x_1, x_2, x_3, S_1, S_2, S_3 \geq 0$$

On applique ensuite les étapes du SIMPLEXE

| $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $S_1$ | $S_2$ | $S_3$ | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 2 | -1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 10 → leaving |
| 1 | 2 | -2 | 0 | 1 | 0 | 20 |
| 0 | 1/4 | 2 | 0 | 0 | 1 | 5 |
| entering -3 | 1 | -2 | 0 | 0 | 0 | |

$L_1' \leftarrow L_1/2$

$L_2' \leftarrow L_2 - L_1'$

$L_4' \leftarrow L_4 + 3L_1'$

# Correction Examen MISC

## Question 2.4 (suite)

| $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $s_1$ | $s_2$ | $s_3$ | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | $-1/2$ | 0 | $1/2$ | 0 | 0 | 5 | |
| 0 | $5/2$ | $-2$ | $-1/2$ | 1 | 0 | 15 | |
| 0 | $1/4$ | 2 | 0 | 0 | 1 | 5 | leaving |
| 0 | $-1/2$ | $-2$ | $3/2$ | 0 | 0 | 15 | |
| | | entering | | | | | |

$L_3' \leftarrow L_3/2$

$L_2' \leftarrow L_2 + 2L_3'$

$L_4' \leftarrow L_4' + 2L_3'$

| $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $s_1$ | $s_2$ | $s_3$ | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | $-1/2$ | 0 | $1/2$ | 0 | 0 | 5 |
| 0 | $11/4$ | 0 | $-1/2$ | 1 | 1 | 20 |
| 0 | $1/8$ | 1 | 0 | 0 | $1/2$ | $5/2$ |
| 0 | $-1/4$ | 0 | $3/2$ | 0 | 1 | 20 |

$L_2' \leftarrow L_2 \cdot \frac{4}{11}$

$L_3' \leftarrow L_3 - \frac{1}{8} L_2'$

$L_1' \leftarrow L_1 + \frac{1}{2} L_2'$

$L_4' \leftarrow L_4 + \frac{1}{4} L_2'$

| $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $s_1$ | $s_2$ | $s_3$ | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 0 | 0 | $11/22$ | $\frac{2}{11}$ | $\frac{2}{11}$ | $\frac{95}{11}$ |
| 0 | 1 | 0 | $\frac{-2}{11}$ | $\frac{4}{11}$ | $\frac{4}{11}$ | $\frac{80}{11}$ |
| 0 | 0 | 1 | $-\frac{1}{44}$ | $-\frac{1}{22}$ | $\frac{10}{22}$ | $\frac{35}{22}$ |
| 0 | 0 | 0 | $32/22$ | $\frac{1}{11}$ | $\frac{1}{11}$ | $\frac{240}{11}$ |