Correction examen MISC 2023-2024 Rattrapage

Examen Master MISC - Optimisation des systèmes de l'ingénieur
Rattrapage
ULCO/EILCO

Juin 2024

Nom :
Prénom :

Total: 30 points
Durée: 2h
Instructions générales: L'examen comprend 2 parties (Chacune de ces parties reprenant différentes sous-questions). Vous êtes libres de rédiger vos réponses sur des pages supplémentaires en veillant toutefois à bien indiquer le numéro de chaque question. Une fois l'examen terminé, Assurez vous de bien écrire votre nom (de façon lisible) sur chacune des pages. Répondez à un maximum de questions, en commençant par les questions qui vous semblent les plus abordables.

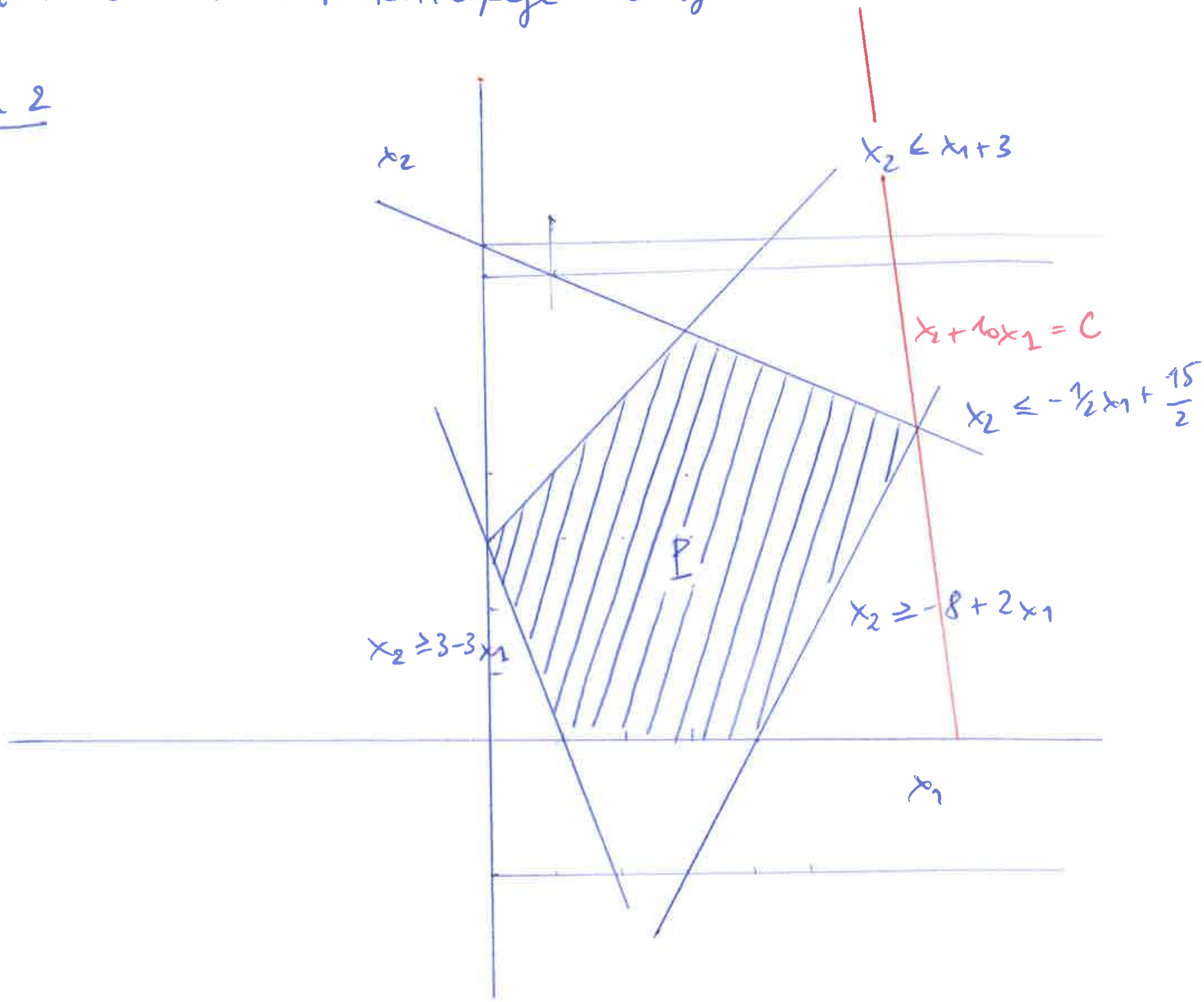
Question 1 (16pts)

1. [5*pts*] *Indiquer si les affirmations suivantes sont vraies ou fausses*

Vrai / Faux	*Dans un programme d'optimisation linéaire de la forme* $\min\ \boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x}$ *s.t.* $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b},\ \boldsymbol{x} \geq 0$, *pour qu'il existe une unique solution la matrice des contraintes* $\boldsymbol{A}$ *doit toujours être carrée*
Vrai / Faux	*Les nombres de contraintes du primal et du dual sont égaux*
Vrai / Faux	*Un disque est un ensemble convexe mais ce n'est pas un polytope*
Vrai / Faux	*Dans un programme d'optimisation linéaire, une solution optimale peut se trouver sur la frontière de l'ensemble admissible (i.e. du polytope P) sans être située sur un sommet.*
Vrai / Faux	*Dans un programme d'optimisation linéaire défini sur m contraintes et n variables, une solution de base admissible s'obtient en fixant m variables à zéro et en résolvant le système résultant sur les $n-m$ variables restantes.*
Vrai / Faux	*Le dual d'un programme d'optimisation linéaire a toujours la même valeur que le primal*
Vrai / Faux	*Lors de l'utilisation de la méthode grand M, si les coefficients du vecteur de coût réduit correspondant aux variables d'écart ne sont pas nuls dans le dernier tableau de simplexe, c'est que le problème de départ n'admettait pas de solution admissible*
Vrai / Faux	*La solution optimale d'un programme d'optimisation linéaire est toujours entière lorsque les coefficients de la fonction coût et des contraintes sont entiers.*

Examen MdC 2023-2024 Rattrapage Corrigé

Question 2



La solution optimale est donc donnée par l'intersection des contraintes

$$\begin{cases} x_2 \leq -\frac{1}{2}x_1 + \frac{15}{2} \\ x_2 \geq -8 + 2x_1 \end{cases} \Rightarrow \quad -\frac{1}{2}x_1 + \frac{15}{2} = -8 + 2x_1$$

$$5x_1 = 31 \qquad \begin{cases} x_1 = \frac{31}{5} \\ x_2 = \frac{22}{5} \end{cases}$$

Dual :

$$\min \quad 3y_1 + \frac{15}{2}y_2 - 8y_3 - 3y_4$$

$$\text{s.t} \quad y_1 + y_2 - y_3 - y_4 \geq 1$$

$$-y_1 + \frac{1}{2}y_2 - 3y_4 + 2y_3 \geq 10$$

$$y_i \geq 0$$

Question 2 (14pts)

1. [5pts] *Indiquer si les affirmations suivantes sont vraies ou fausses*

Vrai / Faux	*Mathématiquement, un sommet d'un polytope P est défini comme un point auquel il existe une fonction linéaire qui atteint son unique maximum sur P en ce point*
Vrai / Faux	*Un polytope convexe est la combinaison convexe de ses points extrêmes*
Vrai / Faux	*On considère un problème d'optimisation linéaire correspondant à la minimisation d'une fonction linéaire sur un polytope P. Si le polytope P contient au moins un point extrême et si le problème admet une solution optimale, alors le probème admet une solution optimale qui est un point extrême.*
Vrai / Faux	*La présence d'une variable d'écart non nulle dans le tableau de simplexe final indique que le problème d'origine n'admet pas de solution*
Vrai / Faux	*Le programme d'optimisation linéaire* $\min\ 2\lvert x_1\rvert + x_2$ *s.t.* $x_1 + x_2 \geq 4$ *peut toujours être réécrit sous la forme* $\min\ 2z_1 + x_2$ *s.t.* $x_1 + x_2 \geq 4$, $x_1 \leq z_1$, $x_1 \geq -z_1$
Vrai / Faux	*Si un polytope ne contient pas de point extrême, alors il contient nécessairement une droite*
Vrai / Faux	*La méthode du simplexe peut être utilisée telle quelle pour résoudre un problème d'optimisation linéaire sur les entiers*
Vrai / Faux	*Dans la méthode du simplexe, une variable dont le coût réduit est positif ne rentrera jamais dans la base si il s'agit d'un problème de maximisation.*

2. [2pts] *On dispose du tableau de simplexe suivant (minimisation). Retrouver, à partir du tableau, le problème de départ.*

x_1	x_2	x_3	s_1	s_2		
1	$-1/2$	0	$-1/6$	$1/3$	$5/2$	x_1
0	$1/4$	1	$1/2$	0	$5/2$	x_3
0	0	2	3	2	$65/2$	

(1)

3. [3pts] *Soit* $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^m$. *Formuler le problème suivant sous forme d'un programme d'optimisation linéaire:*

$$\min_{\boldsymbol{x}} \sum_{i=1}^{m} \max\left\{0, \boldsymbol{a}_i^T \boldsymbol{x} + b_i\right\} \tag{2}$$

4. [4pts] *Résoudre le problème suivant en utilisant la méthode du simplexe (Veiller à bien détailler chaque étape)*

$$\begin{array}{llllll} \max & 3x_1 & +x_2 & +2x_3 & & \\ s.t. & 2x_1 & +x_2 & +x_3 & \leq 2 \\ & x_1 & +2x_2 & +3x_3 & \leq 5 \\ & x_1 & +2x_2 & +x_3 & \leq 6 \\ & x_1, & x_2, & x_3 & \geq 0 \end{array} \tag{3}$$

Question 3

Problème à résoudre :

x_1 = nombre d'arbres

x_2 = nombre d'arbustes

$$\begin{aligned} \max \quad & x_1 + x_2 \\ \text{s.t} \quad & 25x_1 + 10x_2 \leq 1000 \\ & 2x_1 + 5x_2 \leq 200 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

Partie II   Question II.2

On dispose des 2 contraintes

1) $$x_1 - \frac{1}{2}x_2 - \frac{1}{6}S_1 + \frac{1}{3}S_2 = 5/2$$

2) $$\frac{1}{4}x_2 + x_3 + \frac{1}{2}S_1 = 5/2$$

la seconde contrainte donne immédiatement

$$1/2\, x_2 + 2x_3 + S_1 = 5$$

ce à partir de quoi on peut facilement récupérer

$$\frac{x_2}{2} + 2x_3 \leq 5$$

* Pour la seconde contrainte, en substituant 2) dans 1), on a

$$6x_1 - 3x_2 - 5 + 2x_3 + \frac{1}{2}x_2 + 2S_2 = 15$$

$$\Leftrightarrow \quad 6x_1 - \frac{5}{2}x_2 + 2x_3 + 2S_2 = 20$$

ce qui donne $$3x_1 - \frac{5}{4}x_2 + x_3 + S_2 = 10$$

$$3x_1 - \frac{5}{4}x_2 + x_3 \leq 10$$

Partie II Question II.2 (suite)

pour l'objectif, on utilise les 2 contraintes pour substituer les expressions de S_1 et S_2. I.e

$$3S_1 = 15 - 6x_3 - \frac{3}{2}x_2 \Rightarrow S_1 = 5 - 2x_3 - \frac{1}{2}x_2$$

ainsi que $$2S_2 = 20 - 2x_3 + \frac{5}{2}x_2 - 6x_1$$

ce qui donne
$$\begin{aligned} \text{objectif} &= 2x_3 + 3S_1 + 2S_2 \\ &= 2x_3 + 15 - 6x_3 - \tfrac{3}{2}x_2 + 20 - 2x_3 \\ &\quad + \tfrac{5}{2}x_2 - 6x_1 \\ &= -6x_3 + 35 - 6x_1 + x_2 \end{aligned}$$

$$\text{objectif} = x_2 - 6x_1 - 6x_3$$

Question II.3

il suffit d'introduire des variables positives $z_i \geq 0$. A partir de là, on écrit simplement

$$\min_{x, z_i} \sum_{i=1}^{m} z_i$$

$$\text{s.t} \quad a_i^T x + b_i \leq z_i$$

$$z_i \geq 0$$

Question II.4

On commence par réécrire le problème sous forme standard. On a

$$\min \; -3x_1 - x_2 - 2x_3$$

$$\text{s.t.} \quad \begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 + s_1 = 2 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 + s_2 = 5 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 + s_3 = 6 \\ x_1, x_2, x_3, s_1, s_2, s_3 \geq 0 \end{cases}$$

L'application du SIMPLEXE donne ensuite les tableaux suivants :

x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	s_3	
2	1	1	1	0	0	2 → variable sortante
1	2	3	0	1	0	5
1	2	1	0	0	1	6
-3	-1	-2	0	0	1	

variable entrante

$L_1' \leftarrow L_1/2$

$L_2' \leftarrow L_2 - L_1'$

$L_3' \leftarrow L_3 - L_1'$

$L_4' \leftarrow L_4 + 3L_1'$

x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	s_3	
1	1/2	1/2	1/2	0	0	1
0	3/2	5/2	-1/2	1	0	4
0	3/2	1/2	-1/2	0	1	5
0	1/2	-1/2	3/2	0	1	3

Question II.4 (suite)

$L_2' \leftarrow L_2 \cdot 2/5$

$L_1' \leftarrow L_1 - \frac{1}{2} L_2'$

$L_3' \leftarrow L_3 - \frac{1}{2} L_2'$

$L_4 \leftarrow L_4 + \frac{1}{2} L_2'$

x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	s_3	
1	$\frac{2}{10}$	0	$\frac{6}{10}$	$\frac{-2}{10}$	0	$1/5$
0	$\frac{3}{5}$	1	$-1/5$	$2/5$	0	$8/5$
0	$\frac{12}{10}$	0	$-4/10$	$-1/5$	1	$21/5$
0	$\frac{8}{10}$	0	$\frac{14}{10}$	$1/5$	1	$19/5$