Analyse Numérique
Interpolation

Augustin Cosse
augustin.cosse@univ-littoral.fr

November 15, 2024

Question 1 *On considère* $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^4$ *donnés par* $\boldsymbol{x} = [-2, 0, 1, 2]$, $\boldsymbol{y} = [4, 0, 0, 4]$. *Parmi les polynômes suivants, lequel est le polynôme d'interpolation* p *aux points* $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}$ *(justifier votre réponse)*

i) $p_1(x) = x^4 - 2/3x^3 - 3x^2 + 8/3x$

ii) $p_2(x) = 4/3x^2 - 4/3$

iii) $p_3(x) = 1/3x^3 + x^2 - 4/3x$

Question 2 *Montrer qu'il existe une infinité de polynômes de degré deux passant par les points* $(0, 0)$ *et* $(1, 0)$

Question 3 *Trouver les polynômes de plus petit degré passant par les points suivants:*

i) $x_0 = 3, f(x_0) = 5,\ x_1 = 7, f(x_1) = -1$

ii) $x_0 = 3, f(x_0) = 12,\ x_1 = 7, f(x_1) = 146\ x_2 = 1, f(x_2) = 2$

iii) $x_0 = 1.5, f(x_0) = 0,\ x_1 = 2.7, f(x_1) = 0,\ x_2 = 3.1, f(x_2) = 0\ x_3 = -2.1, f(x_3) = 1$

Question 4 *Soit* $V(x_0, x_1, \ldots, x_n)$ *le déterminant de la matrice de Vandermonde*

$$V(x_0, x_1, \ldots, x_n) = \begin{vmatrix} 1 & x_0 & \ldots & x_0^n \\ \vdots & x_1 & \ldots & x_1^n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_n & & x_n^n \end{vmatrix} \tag{1}$$

Montrer la relation

$$V(x_0, x_1, \ldots, x_n) = V(x_0, \ldots, x_{n-1}) \prod_{k=0}^{n-1} (x_n - x_k) \tag{2}$$

En déduire l'équivalence entre l'unicité du polynôme d'interpolatiion et le caractère distinct des points d'interpolation $x_i \neq x_j$, $i \neq j$

Question 5 *Dériver les matrices de Gram (matrices correspondant au système à résoudre pour trouver les polynômes d'interpolation) pour les bases de Lagrange et Newton et vérifier que le déterminant de ces matrices s'annule si et seulement si $x_i \neq x_j$ pour tout $i \neq j$*

Question 6 *On souhaite étudier l'interpolation de la fonction $f(x) = |x|$*

i) *Pour cette fonction et les points d'interpolation $x_0 = -1, x_1 = 0, x_2 = 1$, donner le polynôme d'interpolation dans la base de Newton*

ii) *Déduire du point $i)$ une majoration de l'erreur*

$$E(x) = |f(x) - p_2(x)| \tag{3}$$

pour $x \in [-1, 1]$.

Question 7 *Nous savons que l'erreur d'interpolation de f aux points x_0, x_1 est donnée par*

$$f(x) - p(x) = (x - x_0)(x - x_1)\frac{f''(\zeta(x))}{2}, \quad x_0 < x < x_1 \tag{4}$$

où $f \in \mathcal{C}^2[x_0, x_1]$. Déterminer la fonction $\zeta(x)$ explicitement dans le cas où $f(x) = 1/x$, $x_0 = 1$ et $x_1 = 2$ et trouver $\max_{1 \leq x \leq 2} \zeta(x)$ ainsi que $\min_{1 \leq x \leq 2} \zeta(x)$.

Question 8 *Calculer le polynôme d'interpolation dans chacune des situations suivantes (il n'est pas nécessaire de simplifier le polynôme d'interpolation. I.e. Donner l'expression des polynômes de base de Lagrange, ensuite donner la forme générale du polynôme d'interpolation $p(x) = \sum_{j=0}^{n} p(x_j)\ell_j(x)$)*

1. $x = [-1, 2, 3]$, $y = [4, 4, 8]$
2. $x = [-2, -1, 0, 1]$ $y = [0, -2, -4, 0]$
3. $x = [-1, 0, 1, 2]$ $y = [6, 2, 0, 0]$
4. $x = [-2, -1, 0, 1, 2]$ $y = [4, 1, 0, 1, 4]$
5. $x = [-5, -3, -1, 0, 7, 9, 18]$ $y = [4, 2, 0, -1, -8, -10, -19]$

Question 9 *Calculer le polynôme $p(x)$ de degré inférieur ou égal à 4 tel que*

$$p(-2) = 11, \quad p(-1) = 1, \quad p(0) = 1, \quad p(1) = 5, \quad p(2) = 31$$

Question 10 *Calculer le polynôme d'interpolation satisfaisant les contraintes*

$$p(-1) = 4, \quad p'(-1) = -4, \quad p(0) = 0, \quad p(1) = 0, \quad p'(1) = 0$$

Question 11 *Montrer que si $p(x)$ est un polynôme de degré inférieur ou égal à n interpolant la fonction $f(x)$ aux points $x_0 < x_1 < \ldots < x_n$, alors*

$$f(x) - p(x) = \sum_{i=0}^{n} [f(x) - f(x_i)]\, \ell_i(x) \tag{5}$$

où les $\ell_i(x)$ sont les polynômes d'interpolation de Lagrange.

Question 12 *Monter que si g interpole f aux points $x_0, \ldots, x_{n-1}$ et h interpole f aux points $x_1, x_2, \ldots, x_n$ alors*

$$g(x) + \frac{x_0 - x}{x_n - x}\,(g(x) - h(x)) \tag{6}$$

interpole $f(x)$ aux points $x_0, \ldots, x_n$

Question 13 *Soit la fonction* $\cosh = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$. *Montrer qu'interpoler la fonction* $\cosh x$ *avec un polynôme $p(x)$ de degré* 22 *en* 23 *points distincts sur* $[-1, 1]$ *donne une erreur relative ne dépassant pas* $5 \cdot 10^{-16}$

Question 14 *Trouver la meilleure borne supérieure sur l'erreur d'interpolation de la fonction $f(x) = e^{x-1}$ par un polynôme de degré 12 défini sur 13 noeuds répartis sur* $[-1, 1]$

Question 15 *Calculer le tableau des différences divisées pour les données suivantes*

- $x \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$ $f(x) \in \{2, 1, 2, -7, 10\}$
- $x \in \{4, 2, 0, 3\}$ $f(x) \in \{64, 11, 7, 28\}$

Question 16 *Montrer que si f est un polynôme de degré k, alors pour $n > k$* $f[x_0, \ldots, x_n] = 0$

Question 17 *Prouver la formule de Leibnitz*

$$(fg)[x_0, x_1, \ldots, x_n] = \sum_{k=0}^{n} f[x_0, \ldots, x_k]g[x_k, \ldots, x_n] \tag{7}$$

Question 18 (Phénomène de Runge) *On considère les trois fonctions suivantes:*

1. $f_1(x) = \frac{1}{1+cx^2}$
2. $f_2(x) = e^{-cx^2}$
3. $f_3(x) = |cx|$

On souhaite étudier les polynômes d'interpolation de ces fonctions pour différentes valeurs de la constante c et différentes abscisses d'interpolation. On se concentrera sur l'intervalle $[-1,1]$. Représenter (à l'aide de Julia ou éventuellement python) les polynômes d'interpolation aux points d'interpolation

1. $x = -1 : \frac{2}{n-1} : 1$
2. $x = \cos\left(\frac{n-\frac{1}{2}:-1:\frac{1}{2}}{n}\pi\right)$

pour différentes valeurs de n. Décrire l'évolution du polynôme d'interpolation et de l'erreur d'interpolation en fonction de n et de c.

Question 19 *Afin de formaliser les résultats numériques obtenus à la question précédente, on souhaite à présent étudier de manière plus détaillée la borne sur l'erreur dans le cas de la fonction de Runge $f_1(x)$.*

1. *Donner l'expression de l'erreur d'interpolation $f(x) - p_n(x)$*
2. *Soit $\pi_n(x)$ la fonction nodale*
$$\pi_n(x) = (x - x_0)(x - x_1)\dots(x - x_n) \tag{8}$$
apparaissant dans l'expression de cette erreur et $\max_{x\in[-1,1]} |\pi_n(x)|$ le maximum de cette fonction sur l'intervalle $[-1,1]$. Montrer que
$$\max_{x\in[-1,1]} |\pi_n(x)| \leq n!\; h^{n+1} \tag{9}$$
ou h est le pas d'interpolation.
3. *Soit M_{n+1} une borne sur la dérivée $(n+1)^{ième}$ de la fonction de Runge $f_1^{(n+1)}(x)$. Réécrire l'erreur d'interpolation*
$$\max_{x\in[-1,1]} |f(x) - p_n(x)| \tag{10}$$
en utilisant M_{n+1} et la borne dérivée au point précédent.
4. *En utilisant le fait que $\frac{1}{1+y^2}$ est la dérivée de la fonction $\arctan(y)$, et en utilisant le développement en série de Taylor de la fonction $\arctan(y)$,*
$$\arctan(y) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} y^{2n+1} \tag{11}$$
dériver une développement en série pour $\frac{1}{1+cx^2}$
5. *Déduire du point précédent une borne supérieure sur la dérivée d'ordre n de la fonction de Runge sur l'intervalle $[-1,1]$.*
6. *Finalement, déduire des points précédents une borne sur l'erreur d'interpolation*
$$\max_{x\in[-1,1]} |f(x) - p_n(x)| \tag{12}$$