DS 01 ING2 EILCO/FISEA - Ingénierie Mathématique

Octobre 2024

Nom :
Prénom :

Total: 15 points
Durée: 1h
Instructions générales: Vous êtes libres de rédiger vos réponses sur des pages supplémentaires en veillant toutefois à bien indiquer le numéro de chaque question. Une fois le DS terminé, Assurez vous de bien écrire votre nom (de façon lisible) sur chacune des pages. Répondez à un maximum de questions, en commençant par les questions qui vous semblent les plus abordables.

Question 1 (5pts) *Indiquer si les affirmations suivantes sont vraies ou fausses*

Vrai / Faux — *Dans le cadre d'une régularisation basée sur les normes ℓ_p, plus p est grand, plus la boule associée sera concentrée le long des axes*

Vrai / Faux — *Pour tout $\lambda > 0$, le minimum de la formulation de type Ridge peut être déterminé à l'aide des équations normales.*

Vrai / Faux — *L'estimateur de maximum de vraissemblance correspond à un estimateur de maximum a posteriori pour un a priori uniforme sur les coefficients de régression.*

Vrai / Faux — *Pour tout $j > 0$, l'itération de descente de gradient pour une fonction de coût de type Ridge est donnée par*

$$\beta_j \leftarrow \beta_j + \frac{2\eta}{m} \sum_{i=1}^{m} \left(t^{(i)} - (\beta_0 + \beta_1 x_1^{(i)} + \ldots + \beta_D x_D^{(i)})\right) x_j^{(i)} + 2\lambda\eta\beta_j$$

Vrai / Faux — *La règle de Bayes est donnée par $P(A|B) = P(B|A)P(B)/P(A)$*

Vrai / Faux — *Dans la décomposition biais-variance de l'erreur quadratique moyenne, le biais s'écrit $\mathbb{E}_{\mathcal{D}_i}\left\{h_{\mathcal{D}_i}(\boldsymbol{x}) - \mathbb{E}_{\mathcal{D}_i}\left\{h_{\mathcal{D}_i}(\boldsymbol{x})\right\}\right\}$ où $h_{\mathcal{D}_i}(\boldsymbol{x})$ représente la prédiction du modèle $h(\boldsymbol{x})$ lorsque celui-ci est entrainé sur les données du sous-ensemble $\mathcal{D}_i$*

Vrai / Faux — *La solution d'une régularisation de type Ridge correspond à un estimateur de maximum de vraissemblance avec un a-priori Gaussien*

Question 2 (3pts)

[3*pts*] *On considère les paires $(x^{(i)}, t^{(i)})$ suivantes: $(x^{(i)}, t^{(i)}) \in \{(1,1),(2,2)\}$. On souhaite entrainer un modèle linéaire $h_\beta(x) = \beta_0 + \beta_1 x$ de façon à ce que $h_\beta(x^{(i)}) = t^{(i)}$. En utilisant les équations normales, déterminer la valeur des coefficients β_0, β_1.*

Pour rappel, l'inverse d'une matrice 2×2 de la forme $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ est donnée par $\boldsymbol{A}^{-1} = \frac{1}{ad-bc}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$

Question 3 (4pts) *En utilisant les mêmes données qu'à la question précédente, on souhaite à présent entrainer le modèle à l'aide d'une formulation de type Ridge. Soit $\lambda = .1$ et la fonction de coût*

$$\ell(\beta_0, \beta_1) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{2} \left(t^{(i)} - (\beta_0 + \beta_1 x)\right)^2 + \lambda\beta_1^2.$$

```python
from sklearn.preprocessing import PolynomialFeatures
from sklearn.linear_model import    1
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt


x = np.linspace(-1,1,10)
beta = [.1,.1,1]

t = beta[0] + beta[1]*x + beta[2]*x**2
tnoisy = t+np.random.normal(0,0.1, len(x))

poly = PolynomialFeatures(30)

xtest = np.linspace(-1,1,50)

Xpoly = poly.fit_transform(x.reshape(-1,1))

model =  2 (alpha=.2). 3 (Xpoly, tnoisy)

Xpoly_test = poly.fit_transform(xtest.reshape(-1,1))

prediction = model.  4  (   5   )

plt.scatter(x, tnoisy, c='r')
plt.plot(xtest, prediction)
plt.show()
```

Figure 1: Extrait 1.

1	
2	
3	
4	
5	

Table 1: À compléter avec les lignes manquantes de l'Extrait 1

On procédera comme suit:

1. [1pts] *Centrer les données* $t_c^{(i)} \leftarrow t^{(i)} - \frac{1}{m}\sum_{i=1}^m t^{(i)}$ *et* $x_c^{(i)} \leftarrow x^{(i)} - \frac{1}{m}\sum_{i=1}^m x^{(i)}$ *et donner les* $t_c^{(i)}$ *et* $x_c^{(i)}$ *correspondants*

2. [2pts]*Montrer (mathématiquement) que pour des données centrées, on a* $\beta_0 = 0$

3. [1pts]*Finalement, en déduire la valeur de* β_1 *en annulant la dérivée.*

Question 4 (3pts) *On considère l'extrait de code donné à la figure 1. Certaines parties de cet extrait ont été effacées. Reporter, au tableau 1, les termes manquants afin d'obtenir le résultat donné à la Figure 2.*

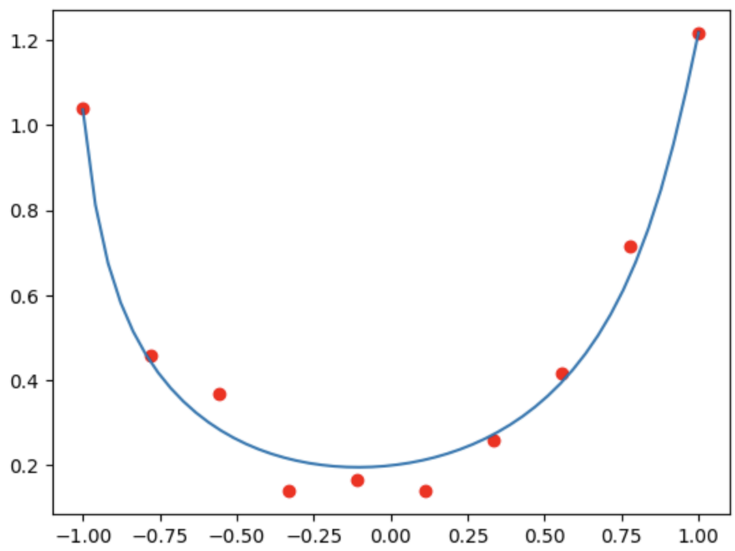

Figure 2: Résultat souhaité pour l'Extrait 1