Analyse Numérique
Devoir Surveillé

Total : 24pts
Durée; 2h

Augustin Cosse
augustin.cosse@univ-littoral.fr

Décembre 2024

Question 1 (Vrai/Faux – 6pts) *Indiquer si les affirmations suivantes sont vraies (✓) ou fausses (✗)*

a. __ *Le degré de précision d'une règle de quadrature d'ordre n est $n+1$ si n est pair et n si n est impair*

b. __ *Choisir des abscisses d'interpolation équidistantes permet d'éviter l'apparition du phénomène de Runge.*

c. __ *L'erreur d'approximation commise par la formule de quadrature de Simpson peut être bornée par un terme de la forme $Ch^5 f^{(4)}(\xi)$ où C est une constante, et $h = (b-a)/2$ représente le pas de quadrature.*

d. __ *La série de Fourier ne s'applique qu'aux fonctions définies sur un intervalle fini.*

e. __ *La série de Fourier de la fonction $f(x)$ définie sur $[-1, 1]$ par $f(x) = x$ et périodique de période 2 est donnée par $1/2 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{n} \cos(2n\pi x/2) + (-1)^n \sin(2n\pi x/2)$*

f. __ *On peut atteindre une précision supérieure, avec une formule du point médian composite, qu'avec une formule de Simpson non composite.*

g. __ *Si une fonction est paire, sa série de Fourier ne contient que des cosinus.*

h. __ *Si le pas de quadrature est suffisamment petit, une règle composite du point médian peut intégrer parfaitement un polynôme de degré 2.*

Question 2 (Interpolation (I) – 5pts) *On considère la fonction $f(x) = e^x$ sur l'intervalle $[-1, 1]$.*

1. *Donner le polynôme d'interpolation de Lagrange aux points $\{(-1, f(-1)), (0, f(0)), (1, f(1)\}$.*

2. *Soit $p_{n-1}(x)$ le polynôme de degré inférieur ou égal à $n-1$ qui interpole la fonction $f(x)$ en un ensemble de n points equidistants de l'intervalle $[-1,1]$. Montrer que l'erreur d'interpolation satisfait*

$$|p_{n-1}(x) - f(x)| \leq \frac{2^n e}{n!}, \quad \textit{pour tout } x \in [-1,1] \tag{1}$$

Question 3 (Quadrature (I) – 6pts) *On considère une formule de quadrature définie sur l'intervalle $[-1,1]$ à partir des abscisses de quadrature $x_0 = -\alpha$ et $x_1 = \alpha$ où $0 < \alpha \leq 1$,*

$$\int_{-1}^{1} f(x)\, dx \approx w_0 f(-\alpha) + w_1 f(\alpha) \tag{2}$$

1. *On souhaite que la formule soit exacte pour tout polynôme de degré 1. Montrer que $w_0 = w_1 = 1$, indépendamment de α*

2. *Montrer ensuite qu'il existe un choix de α pour lequel la formule est exacte pour tous les polynômes de degré 2.*

3. *Finalement, montrer que pour la valeur de α obtenue au point précédent, la formule reste exacte pour tous les polynômes de degré 3.*

Question 4 (Fourier – 5pts)

1. *Donner la forme générale de la série de Fourier pour une fonction $f(x)$ périodique de période T.*

2. *Montrer que les fonctions $f(x) = e^x$ et $g(x) = xe^{-x} - e^{-x}$ sont orthogonales sur $[0,2]$*

3. *Soit la fonction $g(x)$ définie par*

$$g(x) = \frac{1}{2 - e^{ix}} + \frac{1}{2 - e^{-ix}} \tag{3}$$

   La fonction est elle paire ou impaire? Justifier.

4. *Quelle est la période de $g(x)$?*

5. *En fonction de votre réponse au point précédent, donner la série en sinus ou cosinus pour $g(x)$ (Indice: Il pourrait être judicieux d'utiliser le dévelopement en série $\frac{1}{2-x} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{2^{n+1}}$)*