Analyse Numérique
Devoir Surveillé

Total : 24pts

Durée; 2h

Augustin Cosse

augustin.cosse@univ-littoral.fr

Novembre 2024

Question 1 (Vrai/Faux – 6pts) *Indiquer si les affirmations suivantes sont vraies (✓) ou fausses (✗)*

a. __ *Le polynôme d'interpolation d'Hermite défini sur $n+1$ points est de degré $2n+2$*

b. __ *Si une fonction continue et dérivable s'annule en n points, sa dérivée doit s'annuler en au moins $n-1$ points*

c. __ *Le polynôme d'interpolation de degré minimum passant par les points $(-1,-1),(0,0),(1,1)$ est donné par $p_2(x)=x$.*

d. __ *L'erreur commise lors de l'interpolation d'une fonction $f(x)$ par un polynôme de degré n peut être bornée par une expression qui dépend de la dérivée d'ordre n.*

e. __ *Le polynôme de Chebyshev d'ordre 2 est donné par $T_2(x)=2x^2-1$*

f. __ *On considère les points $(x_0,y_0),(x_1,y_1),(x_2,y_2)$. Soit les polynômes $p_{01}^{(1)}$ et $p_{12}^{(1)}$ définis par*

$$p_{01}^{(1)}(x) = y_0\frac{x-x_1}{x_0-x_1} + y_1\frac{x-x_0}{x_1-x_0} \tag{1}$$

$$p_{12}^{(1)}(x) = y_1\frac{x-x_2}{x_1-x_2} + y_2\frac{x-x_1}{x_2-x_1} \tag{2}$$

Si $p_{012}^{(2)}$ est le polynôme d'interpolation aux points $(x_0,y_0),(x_1,y_1),(x_2,y_2)$, on a

$$p_{012}^{(2)}(x) = \frac{(x-x_0)p_{12}^{(1)}(x) - (x-x_2)p_{01}^{(1)}(x)}{x_2-x_0} \tag{3}$$

g. ___ *Étant donnés $n+1$ points distincts, le polynôme d'interpolation de Lagrange de degré n est défini de manière unique*

h. ___ *Définir un polynôme d'interpolation aux abscisses d'interpolation de Chebyshev permet de minimiser la borne sur l'erreur d'interpolation.*

Question 2 (Interpolation (I) – 6pts)

1. **[3pts]** *Soit $f(x) = \cos(x)$ pour $x \in [0, \pi/2]$. On souhaite calculer le polynôme d'interpolation de degré 2 défini sur des noeuds équidistants. Montrer que $p_2(\pi/5) = \frac{3}{25}(1 + 4\sqrt{2})$.*

2. **[3pts]** [2.5*pts*] *Soit $f(x) = 3^x$. On souhaite calculer le polynôme de degré 2 qui interpole la fonction $f(x)$ aux points d'abscisses $x_0 = 0$, $x_1 = 1$ et $x_2 = 2$. Utiliser le schéma des différences divisées de Newton pour calculer ce polynôme.*

Question 3 (Interpolation (II) – 5pts) *Soit $T_n(x)$ le polynôme de Chebyshev d'ordre n.*

1. **[2.5pts]** *Donner la définition de $T_n(x)$ (en fonction de θ et en fonction de x)*

2. **[2.5pts]** *En utilisant cette définition, démontrer l'inégalité de Turán*

$$T_n(x)^2 - T_{n-1}(x)T_{n+1}(x) = 1 - x^2 > 0, \quad \text{pour } -1 < x < 1 \tag{4}$$

Question 4 (Quadrature – 7pts) *On considère la fonction $f(x) = -x^2 - x - 1$ sur l'intervalle $[-1, 1]$. On souhaite améliorer la règle des trapèzes. On procédera comme suit:*

1. **[2pts]** *Approximer l'intégrale à l'aide de la règle des trapèzes classique sur l'intervalle $[-1, 1]$*

2. *Afin d'améliorer l'approximation, on considère la droite représentée en vert (droite tangente à la fonction) sur la Figure 1. On procédera comme suit:*

   (a) **[1pt]** *Calculer la pente de la droite représentée en noir (correspondant à l'approximation par la règle des trapèzes). (Pour rappel, la pente de la droite passant par deux points (x_0, y_0) et (x_1, y_1) est donnée par $(y_1 - y_0)/(x_1 - x_0)$*

   (b) **[1pt]** *Chercher ensuite l'abscisse du point x^* auquel la pente de la droite noire est égale à la dérivée de la fonction $f(x)$.*

   (c) **[1pt]** *Déterminer l'équation de la droite verte (tangente au point d'abscisse x^*). Pour rappel l'équation de la droite passant par un point (x^*, y^*) et de pente Δ est donnée par $y(x) = \Delta(x - x^*) + y^*$*

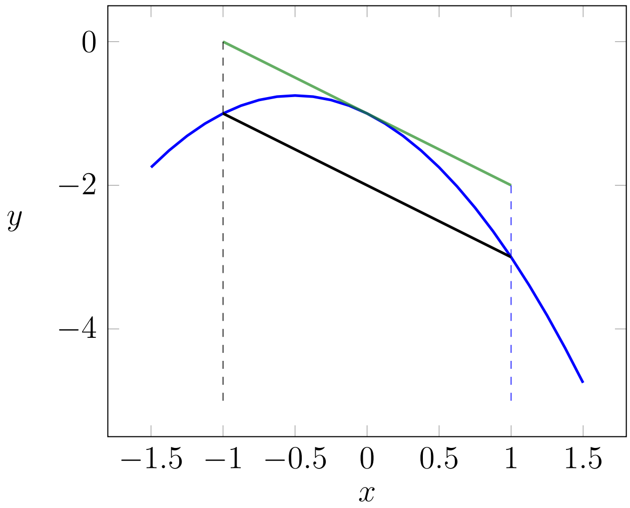

Figure 1: Schéma d'amélioration de la règle des Trapèzes

(d) **[1pt]** *Soit $g(-1)$ et $g(1)$ les images des points d'abscisses $x = -1$ et $x = 1$ par la droite verte. Modifier la règle des trapèzes en se basant non plus sur $f(-1)$ et $f(1)$ mais sur $(f(-1) + g(-1))/2$ et $(f(1) + g(1))/2$. Donner la valeur de l'approximation correspondante.*

(e) **[1pt]** *Calculer la valeur exacte de l'intégrale sur [-1,1] et comparer avec les deux approximations obtenues aux points précédents.*