Corrigé

Analyse Numérique
Devoir Surveillé

Total : 24pts
Durée; 2h

Augustin Cosse
augustin.cosse@univ-littoral.fr

Novembre 2024

Question 1 (Vrai/Faux – 6pts) *Indiquer si les affirmations suivantes sont vraies (✓) ou fausses (✗)*

a. ✗ *Le polynôme d'interpolation d'Hermite défini sur $n+1$ points est de degré $2n+2$*

b. ✓ *Si une fonction continue et dérivable s'annule en n points, sa dérivée doit s'annuler en au moins $n-1$ points*

c. ✓ *Le polynôme d'interpolation de degré minimum passant par les points $(-1,-1),(0,0),(1,1)$ est donné par $p_2(x)=x$.*

d. ✗ *L'erreur commise lors de l'interpolation d'une fonction $f(x)$ par un polynôme de degré n peut être bornée par une expression qui dépend de la dérivée d'ordre n.*

e. ✓ *Le polynôme de Chebyshev d'ordre 2 est donné par $T_2(x)=2x^2-1$*

f. ✓ *On considère les points $(x_0,y_0),(x_1,y_1),(x_2,y_2)$. Soit les polynômes $p_{01}^{(1)}$ et $p_{12}^{(1)}$ définis par*

$$p_{01}^{(1)}(x) = y_0\frac{x-x_1}{x_0-x_1} + y_1\frac{x-x_0}{x_1-x_0} \tag{1}$$

$$p_{12}^{(1)}(x) = y_1\frac{x-x_2}{x_1-x_2} + y_2\frac{x-x_1}{x_2-x_1} \tag{2}$$

Si $p_{012}^{(2)}$ est le polynôme d'interpolation aux points $(x_0,y_0),(x_1,y_1),(x_2,y_2)$, on a

$$p_{012}^{(2)}(x) = \frac{(x-x_0)p_{12}^{(1)}(x) - (x-x_2)p_{01}^{(1)}(x)}{x_2-x_0} \tag{3}$$

Question 2 (Solution) ①

pour un polynôme d'interpolation de degré 2 sur des noeuds équi-distants on a besoin de 3 noeuds : $0, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}$

le polynôme d'interpolation de Lagrange est alors donné par

$$\cos(0)\,\frac{(x-\pi/4)(x-\pi/2)}{(\pi/4)(\pi/2)} + \cos(\pi/4)\,\frac{x(x-\pi/2)}{\pi/4(\pi/4-\pi/2)}$$

(on notera que $\cos(\pi/2)=0$)

$$= \frac{(x-\pi/4)(x-\pi/2)}{\pi^2/8} - \frac{\sqrt{2}}{2}\,\frac{x(x-\pi/2)}{\pi^2/16}$$

au point $x=\pi/5$ on a $P_2(\pi/5) = \frac{(\pi/5-\pi/4)(\pi/5-\pi/2)}{\pi^2/8} - \frac{\sqrt{2}}{2}\,\frac{\pi/5(\pi/5-\pi/2)}{\pi^2/16}$

ce qui se simplifie

$$P_2\left(\frac{\pi}{5}\right) = \frac{(-\pi/20)(-\frac{3\pi}{10})}{\pi^2/8} - \frac{\sqrt{2}}{2}\,\frac{(-\frac{3\pi}{10})(\pi/5)}{\pi^2/16}$$

$$= \frac{3\pi^2 8}{200\pi^2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\,\frac{3\pi^2\, 16}{50\,\pi^2}$$

$$= \frac{3}{25} + 4\sqrt{2}\,\frac{3}{25}$$

② On a $(x,y) = \{(0,2), (1,3), (2,9)\}$, le schéma des différences divisées de Newton donne donc

Question 2 (Suite) (2)

$(0,1)$

$\frac{3-1}{1-0} = 2$

$(1,3)$

$\dfrac{\frac{9-3}{2-1} - \frac{3-1}{1-0}}{2-0} = \frac{4}{2} = 2$

$\frac{9-3}{2-1} = 6$

$(2,9)$

le polynôme d'interpolation $p_2(x)$ s'obtient en retenant les coefficients de la partie supérieure du tableau.

$$p(x) = 1 + \frac{3-1}{1-0}(x-x_0) + \frac{\frac{9-3}{2-1} - \frac{3-1}{1-0}}{2-0}(x-x_0)(x-x_1)$$

$$= 1 + 2x + 2x(x-1)$$

Question 3

a) On a $T_n(x) = \cos(n \operatorname{acos} x) = \cos(n\theta)$ avec $\theta = \operatorname{acos} x$

ou $x = \cos\theta$

b) En utilisant la définition de $T_n(\theta)$ ainsi qu'un peu de trigonométrie, on obtient

$$T_n^2(x) - T_{n-1}(x)T_{n+1}(x) = \cos^2 n\theta - \cos((n-1)\theta)\cos((n+1)\theta)$$

$$= \cos^2 n\theta - (\cos n\theta\cos\theta + \sin n\theta \sin\theta)$$

$$\times(\cos n\theta \cos\theta - \sin n\theta \sin\theta)$$

$$= \cos^2_n\theta - (\cos^2_n\theta\cos^2\theta - \sin^2 n\theta \sin^2\theta)$$

Question 3 (suite)

$$T_n^2(x) - T_{n-1}(x)T_{n+1}(x) = \cos^2 n\theta - (\cos^2 n\theta \cos^2\theta - \sin^2 n\theta \sin^2\theta)$$

$$= \cos^2 n\theta (1-\cos^2\theta) + \sin^2 n\theta \sin^2\theta$$

$$= (\cos^2 n\theta + \sin^2 n\theta)\sin^2\theta$$

$$= 1-\cos^2\theta = 1 - (\cos(a\cos x))^2$$

$$= 1-x^2$$

Question 4 ①

La règle des trapèzes donne

$$\int_{-1}^{1} -x^2-x-1 \, dx \approx \frac{b-a}{} \left[\frac{f(a)+f(b)}{2}\right]$$

$$= 2\left[\frac{(-1+1-1)+(-1-1-1)}{2}\right]$$

$$= -1-3 = -4$$

2) a) La droite passe par les points $(-1, f(1))$ et $(1, f(1))$, la pente est donc donnée par $-\frac{2}{2} = -1$

b) Pour trouver l'abscisse du point x^* on calcule la pente de $f(x)$ donnée par $f'(x) = -2x-1$ et on l'égale à -1 (la pente de la droite noire)

$$-2x-1 = -1 \quad \Rightarrow \quad x^* = 0$$

c) Étant donné la pente, on trouve

$$y(x) \equiv -x + f(0) = -x-1$$

Question 4 (suite)

d) la nouvelle règle donne

$$\int_{-1}^{1} -x^2-x-1 \, dx \approx \frac{1+1}{2}\left[\frac{f(-1)+g(-1)}{2} + \frac{f(1)+g(1)}{2}\right]$$

soit $\displaystyle\int_{-1}^{1} -x^2-x-1 \, dx \simeq \left[\frac{f(-1)+g(-1)}{2} + \frac{f(1)+g(1)}{2}\right]$

$$= \left[\frac{-1+g(-1)}{2} + \frac{-3+g(1)}{2}\right]$$

à partir de la réponse au point c) on a $g(-1)=0$ et $g(1)=-2$

on peut donc approximer l'intégrale comme

$$\int_{-1}^{1} -x^2-x-1 \, dx \approx \left[-\frac{1}{2} - \frac{5}{2}\right] = -3$$

e) Pour finir, on calcule facilement

$$\int_{-1}^{1} -x^2-x-1 \, dx = \left| -\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} - x \right|_{-1}^{1} = -\frac{2}{3} - 2 = -\frac{8}{3}$$