Corrigé

Analyse Numérique
Devoir Surveillé

Total : 2~~4~~2pts
Durée; 2h

Augustin Cosse
augustin.cosse@univ-littoral.fr

Décembre 2024

Question 1 (Vrai/Faux – 6pts) *Indiquer si les affirmations suivantes sont vraies (✓) ou fausses (✗)*

a. ✓ *Le degré de précision d'une règle de quadrature d'ordre n est $n+1$ si n est pair et n si n est impair*

b. ✗ *Choisir des abscisses d'interpolation équidistantes permet d'éviter l'apparition du phénomène de Runge.*

c. ✓ *L'erreur d'approximation commise par la formule de quadrature de Simpson peut être bornée par un terme de la forme $Ch^5 f^{(4)}(\xi)$ où C est une constante, et $h = (b-a)/2$ représente le pas de quadrature.*

d. ✗ *La série de Fourier ne s'applique qu'aux fonctions définies sur un intervalle fini.*

e. ✗ *La série de Fourier de la fonction $f(x)$ définie sur $[-1,1]$ par $f(x) = x$ et périodique de période 2 est donnée par $1/2 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{n} \cos(2n\pi x/2) + (-1)^n \sin(2n\pi x/2)$*

f. ✓ *On peut atteindre une précision supérieure, avec une formule du point médian composite, qu'avec une formule de Simpson non composite.*

g. ✓ *Si une fonction est paire, sa série de Fourier ne contient que des cosinus.*

h. ✗ *Si le pas de quadrature est suffisamment petit, une règle composite du point médian peut intégrer parfaitement un polynôme de degré 2.*

Question 2 (Interpolation (I) – 5pts) *On considère la fonction $f(x) = e^x$ sur l'intervalle $[-1,1]$.*

1. *Donner le polynôme d'interpolation de Lagrange aux points $\{(-1, f(-1)), (0, f(0)), (1, f(1)\}$.*

Question 2 (Solution)

1) le polynôme de Lagrange pour les points $\{(-1, e^{-1}), (0, 1), (1, e^{1})\}$ est donné par

$$p_2(x) = e^{-1} l_{-1}(x) + 1\, l_0(x) + e^{1} l_1(x)$$

où $$l_{-1}(x) = \frac{x(x-1)}{2} \qquad l_0(x) = -(x+1)(x-1)$$

$$l_1(x) = \frac{x(x+1)}{2}$$

2) En utilisant la formule de l'erreur, on a

$$|p_{n-1}(x) - f(x)| \le \sup_{\xi \in [-1,1]} \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!} (x - x_0)(x - x_1) \cdots (x - x_{n-1})$$

pour n points equidistants $x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}$ de l'intervalle $[-1, 1]$

on peut donc écrire (***)

$$|p_{n-1}(x) - f(x)| \le \sup_{\xi \in [-1,1]} \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!} \max_{x \in [-1,1]} |(x - x_0)(x - x_1) \cdots (x - x_{n-1})|$$

la fonction $f(x)$ est donné par l'exponentielle et on a donc (*)

$f'(x) = e^x$

$f''(x) = e^x$ et par conséquent $\sup_{\xi \in [-1,1]} f^{(n)}(\xi) = \sup_{\xi \in [-1,1]} e^{\xi} \le e^{1}$

$\vdots$

$f^{(n)}(x) = e^x$

D'autre part étant donné que $x \in [-1, 1]$ et que tous les points d'interpolation appartiennent aussi à cet intervalle on

a $\max_{x \in [-1,1]} |x - x_i| \le 2$ Soit $\max_{x \in [-1,1]} |(x - x_0) \cdots (x - x_{n-1})| \le 2^n$ (**)

Question 2 (suite)

En combinant (*) et (**) avec la formule d'erreur (***) on obtient

$$|p_{n-1}(x) - f(x)| \leq \frac{e\, 2^n}{n!}$$

Question 3 (solution)

a) On souhaite que la règle soit exacte pour tout polynôme de degré 1. On doit donc avoir

$$\int_{-1}^{1} ax+b \, dx = w_0 \quad p(-\alpha) + w_1\, p(\alpha)$$
$$= w_0(-a\alpha + b) + w_1(a\alpha + b)$$

en développant et en identifiant les membres de gauche et de droite, on trouve

$$\left| \frac{ax^2}{2} + bx \right|_{-1}^{1} = a(w_1 - w_0)\alpha + b(w_0 + w_1)$$

$$\Leftrightarrow \quad 2b = a(w_1 - w_0)\alpha + b(w_0 + w_1)$$

puisque l'égalité doit être vérifiée pour tout choix de a et b (en prenant $a = 0$ et b quelconque) on doit entre autre avoir

$$2b = b(w_0 + w_1) \Rightarrow w_0 + w_1 = 2$$

de la même manière si on prend a quelconque et $b = 0$ on trouve

$$(w_1 - w_0)\alpha = 0 \Rightarrow w_1 = w_0$$

(étant donné que la règle doit être exacte indépendamment de α)

Question 3 (suite)

en appliquant un raisonnement similaire pour un polynôme de degré 2, on trouve

$$\int_{-1}^{1} ax^2+bx+c \, dx = w_0\left(a(-\alpha)^2+b(-\alpha)+c\right)+w_1\left(a(\alpha)^2+b\alpha+c\right)$$

$$\Leftrightarrow \left| \frac{ax^3}{3}+\frac{bx^2}{2}+cx \right|_{-1}^{1} = (w_0+w_1)a\,\alpha^2+(w_1-w_0)b\,\alpha+(w_0+w_1)c$$

$$\Leftrightarrow \frac{2a}{3}+2c = (w_0+w_1)a\,\alpha^2+(w_1-w_0)b\,\alpha+(w_0+w_1)c$$

en identifiant les coefficients du polynôme, on trouve bien

$(w_0+w_1)=2$ comme au point 1

mais cette fois on voit aussi que l'on doit avoir

$(w_0+w_1)\alpha^2 = \frac{2}{3}$ ce qui donne, pour $w_0+w_1=2$

$$\alpha = 1/\sqrt{3}$$

③ Clairement, on a d'une part

$$\int_{-1}^{1} ax^3+bx^2+cx+d = \int_{-1}^{1}(bx^2 \quad +d)\,dx$$

$$= \int_{-1}^{1} bx^2+cx+d \, dx$$

(les fonctions ax^3 et cx étant impaires)

D'autre part, on a

$$\underbrace{a(-\alpha)^3 w_0 + a(\alpha)^3 w_1}_{(*)} = a\alpha(w_1-w_0)=0 \quad \text{puisque } w_0=w_1=1$$

Question 3 (suite)

En utilisant (*) on trouve donc $\quad$ (Soit $p_3(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$)

$$w_0 p_3(-\alpha) + w_1 p_3(\alpha) = w_0[(-\alpha)^3 a + (-\alpha)^2 b + (-\alpha)c + d]$$
$$+ w_1 [(\alpha)^3 a + (\alpha)^2 b + \alpha c + d]$$
$$= w_0 [(-\alpha)^2 b + (-\alpha) c + d]$$
$$+ w_1 [(\alpha)^2 b + \alpha c + d]$$

puisque l'on a montré que la règle était exacte pour tout polynôme de degré 2, en utilisant le fait que

$$\int_{-1}^{1} ax^3 + bx^2 + cx + d = \int_{-1}^{1} bx^2 + cx + d$$

on retrouve bien

$$\int_{-1}^{1} (ax^3 + bx^2 + cx + d)dx = \int_{-1}^{1} bx^2 + cx + d$$
$$= w_0 [(-\alpha)^2 b + (-\alpha) c + d]$$
$$+ w_1 [(\alpha^2) b + \alpha c + d]$$
$$= w_0 p_3(-\alpha) + w_1 p_3(\alpha).$$

Question 4 (Solution)

1) On a
$$S(f) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cos\left(\frac{2n\pi x}{T}\right) + b_n \sin\left(\frac{2n\pi x}{T}\right)$$

où $a_0 = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(x)dx \quad a_n = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(x) \cos\left(\frac{2n\pi x}{T}\right)dx$

$$b_n = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(x) \sin\left(\frac{2\pi n x}{T}\right)dx$$

Question 4 (suite)

2 fonctions $u(x)$ et $v(x)$ réelles sont orthogonales sur $[a,b]$

$$\int_a^b u(x)\,v(x)\,dx = 0$$

en on doit donc montrer $\int_0^2 e^x(xe^{-x} - e^{-x})\,dx = 0$

En développant, on trouve $\int_0^2 e^x(xe^{-x} - e^{-x})\,dx = \int_0^2 (x-1)\,dx$

$$= \left| \frac{x^2}{2} - x \right|_0^2 = 0$$

c) On a $g(x) = \dfrac{1}{2-e^{ix}} + \dfrac{1}{2-e^{-ix}}$ et $g(-x) = \dfrac{1}{2-e^{-ix}} + \dfrac{1}{2-e^{ix}}$

ce qui donne bien $g(x) = g(-x)$, la fonction est paire.

d) la fonction $e^{ix} = \cos x + i\sin x$ est de période 2π. La fonction $g(x)$ est donc de période 2π également.

e) En appliquant l'indice, on trouve

$$g(x) = \frac{1}{2-e^{ix}} + \frac{1}{2-e^{-ix}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(e^{ix})^n}{2^{n+1}} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(e^{-ix})^n}{2^{n+1}}$$

de Moivre

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{inx}}{2^{n+1}} + \frac{e^{-inx}}{2^{n+1}}$$

Euler

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^{n+1}} \left[\cos nx + i\sin nx + \cos nx - i\sin nx \right]$$

(il n'y avait donc même pas besoin de calculer les coefficients)

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^{n+1}}\, 2\cos nx$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} \cos nx$$