Corrigé

Examen ING1-AGRO EILCO - Analyse Numérique

Janvier 2025

Nom :
Prénom :

Total : 32 points
Durée : 2h
Instructions générales : Pas de calculatrice autorisée, aucun matériel autorisé
L'examen comprend 2 parties (Chacune de ces parties reprenant différentes sous-questions). Vous êtes libres de rédiger vos réponses sur des pages supplémentaires en veillant toutefois à bien indiquer le numéro de chaque question. Une fois l'examen terminé, assurez vous de bien écrire votre nom (de façon lisible) sur chacune des pages. Répondez à un maximum de questions, en commençant par les questions qui vous semblent les plus abordables.

Partie 1 (Interpolation et quadrature – 19pts)

1. [5pts] *Indiquer si les affirmations suivantes sont vraies ou fausses*

Vrai / Faux	*Étant donné n points distincts $x_1, x_2, \ldots, x_n$ il existe un unique polynôme p_n de degré n satisfaisant les contraintes $p_n(x_i) = y_i$ pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$*
Vrai / Faux	*La règle du point médian est exacte pour tous les polynômes de degré 1*
Vrai / Faux	*Étant donné un intervalle $[a, b]$, la règle de Newton-Cotes ouverte d'ordre n est définie sur les points d'abscisses $x_0 + ih$, pour $i = 0, \ldots, n$ où $x_0 = a$ et $h = (b-a)/(n+2)$*
Vrai / Faux	*Soit les abscisses $x_j = j$, $j = 0, 1, 2$. Soit $p_{\{0,1\}} = 2x+1$ et $p_{\{1,2\}} = x+2$ les polynômes d'interpolation aux points $x = 0, 1$ et $x = 1, 2$ respectivement. Si $p_{\{0,1,2\}}(x)$ est le polynôme d'interpolation de degré 2 aux points $\{0, 1, 2\}$, on a $p_{\{0,1,2\}}(1) = 5/2$*
Vrai / Faux	*Le polynôme de Chebyshev d'ordre 2 est donné par $T_2(x) = 2x^2 - 1$*
Vrai / Faux	*L'approximation de $\ln(2) = \int_0^1 \frac{1}{1+x} dx$ par la règle du trapèze (non composite) donne 0.75*
Vrai / Faux	*L'algorithme de Neville utilisé pour l'interpolation requiert des points équidistants*
Vrai / Faux	*Le degré de précision de la formule de quadrature $\int_{-1}^{1} f(x)\,dx = f(-\frac{\sqrt{3}}{3}) + f(\frac{\sqrt{3}}{3})$ est au moins égal à deux.*

2. [6pts] *On considère la fonction*

$$f : \begin{cases} [0, \pi] \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \sin(x) \end{cases} \tag{1}$$

/2 (a) *Calculer le polynôme d'interpolation $p_2(x)$ de $f(x)$ aux points d'abscisses $0, \pi/2, \pi$.*

/2 (b) **(Question de Cours)** *Énoncer le théorème permettant de borner l'erreur d'interpolation dans le cas général sur $n+1$ points équidistants.*

t (jours)	h (cm)
1	2
3	6
4	12
6	24

TABLEAU 1 – Données à utiliser pour la question 1.4.

/1 (c) *Montrer que pour tout $x \in [0, \pi]$, si $p_2(x)$ est le polynôme obtenu à la question 1.2a, on a*

$$|f(x) - p_2(x)| \leq \max_{x\in[0,\pi]} \frac{|x(x-\pi/2)(x-\pi)|}{6} \tag{2}$$

/1 (d) *En déduire que pout tout $x \in [0, \pi]$*

$$|f(x) - p_2(x)| \leq \frac{\pi^3}{12} \tag{3}$$

3. [4pts] *Quadrature.*

/1 (a) **(Question de Cours)** *Dans le cadre des formules de quadrature de Newton-Cotes, énoncer le lien entre ordre de la formule et degré de précision*

/3 (b) *Soit la formule de quadrature*

$$\int_{-1}^{1} f(t)\, dt \approx w_0 f(-1) + w_1 f(0) + w_2 f(1) \tag{4}$$

Sans les résoudre, donner les équations que doivent satisfaire les poids w_0, w_1 et w_2 afin que la formule soit exacte pour tout polynôme de degré 2.

4. [4pts] *Un chercheur étudiant la croissance d'une espèce de plante rare a rassemblé des données sur la croissance de la plante au cours du temps dans le tableau 1.*

/2 (a) *Construire la table des différences divisées de Newton pour les données du tableau 1 en veillant bien à détailler chaque étape.*

/1 (b) *Utiliser la table des différences divisées pour construire le polynôme d'interpolation de Newton.*

/1 (c) *Finalement, en utilisant le polynôme obtenu au point précédent, estimer la taille de la plante après 5 jours.*

Partie 2 (Transformée de Laplace et transformée de Fourier – 13pts)

1. [5pts] *Indiquer si les affirmations suivantes sont vraies ou fausses*

Vrai / Faux	*La transformée de Laplace de* $f(t) = \sin(at)$ *est donnée par* $\mathcal{L}\{f(t)\} = \frac{a}{s^2+a^2}$
Vrai / Faux	*Une fonction* $f(t)$ *est d'ordre exponentiel* α *si il existe des constantes* M, α *et* $t_0 \geq 0$ *telles que* $\lvert f(t)\rvert \geq Me^{\alpha t}$ *pour tout* $t \geq t_0$.
Vrai / Faux	*Pour tout* $\alpha, \beta > 0$, *Les fonctions* $\alpha\sin(t) + \beta\cos(t)$ *et* $\alpha\sin(2t) + \beta\cos(3t)$ *sont orthogonales sur* $[0, 2\pi]$
Vrai / Faux	*La série de Fourier de la fonction* $f(x)$ *définie sur* $[-1, 1]$ *par* $f(x) = x$ *et périodique de période 2 est donnée par* $1/2 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{n}\cos(2n\pi x/2) + (-1)^n \sin(2n\pi x/2)$
Vrai / Faux	*Pour toute transformée de Laplace* $F(s)$ *il existe un unique inverse* $f(t)$ *tel que* $\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s)$.
Vrai / Faux	*La fonction* $f(x) = \cos(2\pi x) + 4\sin(3\pi x)$ *est périodique de période 2*
Vrai / Faux	*Soit* $F(s)$ *la transformée de Laplace de* $f(t)$. *alors* $F(s-a)$ *est la transformée de Laplace de la fonction* $f(t)e^{(t-a)}$.
Vrai / Faux	*Si une fonction est paire, sa série de Fourier ne contient que des cosinus*

2. [4pts] *On considère la fonction périodique* $f(x)$ *représentée à la figure 1 et définie sur sa période par*

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } -2 \leq x \leq -1 \\ 1 & \text{si } -1 < x < 1 \\ 0 & \text{si } 1 \leq x \leq 2 \end{cases} \tag{5}$$

/1 (a) *Donner la période de* $f(x)$.

/3 (b) *Calculer les coefficients de Fourier et donner la série de Fourier de* $f(x)$

3. [4pts] *Orthogonalité*

/2 (a) **(Question de cours)** *Rappeler la définition de l'orthogonalité sur un intervalle* $[a, b]$ *pour deux fonctions* $f(x)$ *et* $g(x)$.

/1 (b) *La notion d'orthogonalité peut être étendue à l'aide d'une fonction poids* $w(x)$. *On dit que deux fonctions réelles* $f(x)$ *et* $g(x)$ *sont orthogonales sur l'intervalle* $[a, b]$ *par rapport à la fonction poids* $w(x)$ *si*

$$\int_a^b f(x)g(x)w(x)\,dx = 0 \tag{6}$$

Montrer que les fonctions $f(x) = x$ *et* $g(x) = x^2 - 1/3$ *sont orthogonales sur* $[-1, 1]$ *par rapport à la fonction poids* $w(x) = 1 - x^2$.

/0,5 (c) *En déduire deux fonctions* $\tilde{f}(x)$ *et* $\tilde{g}(x)$ *qui sont orthogonales (au sens usuel ou pour* $w(x) = 1$*) sur* $[-1, 1]$.

/0,5 (d) *Finalement, montrer que pour tout* $a > 0$, *pour toute fonction paire* $f(x)$ *et toute fonction impaire* $g(x)$, f *et* g *sont orthogonales sur* $[-a, a]$

Examen ING1 - AGRO 2025 - Session 01

Question 1.2 (Corrigé)

On considère les points d'interpolation $(0, \sin(0))$ $(\pi/2, \sin(\pi/2))$ $(\pi, \sin(\pi))$

On note qu'étant donné que $\sin(0) = \sin(\pi) = 0$, le polynôme d'interpolation s'écrit

$$P_2(x) = f(\pi/2) \frac{(x-0)(x-\pi)}{(\pi/2 - 0)(\pi/2 - \pi)} = \sin(\pi/2) \frac{x(x-\pi)}{-\pi^2/4} = \frac{x(x-\pi)}{-\pi^2/4}$$

b) La borne sur l'erreur d'interpolation est donnée par

$$|P_n(x) - f(x)| \leq \sup_{\xi \in [a,b]} |f^{(n+1)}(\xi)| \cdot \frac{(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_n)}{(n+1)!}$$

c) En appliquant la borne du point (b) au problème d'interpolation, on trouve

$$|P_2(x) - f(x)| \leq \frac{x(x-\pi/2)(x-\pi)}{3!} \sup_{\xi \in [0,\pi]} |f^{(3)}(\xi)|$$

On note que $(\sin(x))' = \cos(x)$, $(\sin(x))'' = -\sin x$ et donc $f^{(3)}(x) = (\sin(x))''' = -\cos x$. On a donc $|f^{(3)}(\xi)| = |\cos(\xi)| \leq 1$

ce qui donne le résultat souhaité

$$|P_2(x) - f(x)| \leq \frac{x(x-\pi/2)(x-\pi)}{3!}$$

d) Pour obtenir la borne du point (d), il suffit de noter que sur $x \in [0,\pi]$ on a $|x| \leq \pi$ $|x - \pi/2| \leq \pi/2$ et $|x-\pi| \leq \pi$, ainsi que $3! = 6$

On obtient donc $|P_2(x) - f(x)| \leq \left|\frac{x(x-\pi/2)(x-\pi)}{6}\right| \leq \frac{\pi^3}{12}$

Examen ING1 - AGRO 2025 Session 01

Question 1.3 (Corrigé)

(a) Soit n l'ordre de la règle de quadrature

Si n est pair $\rightarrow$ le degré de précision est $n+1$

Si n est impair $\rightarrow$ le degré de précision est n

b) On souhaite que la règle soit exacte pour tout polynôme de degré 2

On doit donc avoir pour tout polynôme de la forme $p(x) = ax^2 + bx + c$

$$\int_{-1}^{1} p(x)\,dx = w_0\, p(-1) + w_1\, p(0) + w_2\, p(1) \quad (*)$$

Soit $\displaystyle\int_{-1}^{1} p(x)\,dx = \int_{-1}^{1} ax^2 + bx + c\,dx = \left| \frac{ax^3}{3} + \frac{bx^2}{2} + cx \right|_{-1}^{1}$

$$= \frac{2a}{3} + 2c$$

d'un autre côté la règle de quadrature donne

$$w_0\, p(-1) + w_1\, p(0) + w_2\, p(1) = w_0(a - b + c) + w_1 c + w_2(a + b + c)$$

$$= a(w_0 + w_2) + b(w_2 - w_0) + c(w_0 + w_1 + w_2)$$

Afin que l'égalité $(*)$ soit satisfaite pour tout polynôme, on identifie chacun des coefficients de a, b et c ce qui donne les équations

$$\frac{2a}{3} + 2c = a(w_0 + w_2) + b(w_2 - w_0) + c(w_0 + w_1 + w_2)$$

pour tout a, b, c

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{2}{3} = w_0 + w_2 \\ 0 = w_2 - w_0 \\ 2 = w_0 + w_1 + w_2 \end{cases}$$

Examen ING1 – AGRO 2025 Session 01

Question 1.4 (Corrigé)

Le tableau des différences divisées de Newton donne

t	$h(t)$			
1	2			
		$\frac{6-2}{3-1} = 2$		
3	6		$\frac{6-2}{4-1} = 4/3$	
		$\frac{12-6}{4-3} = 6$		$\frac{0-4/3}{6-1} = -\frac{4}{15}$
4	12		$\frac{6-6}{6-3} = 0$	
		$\frac{24-12}{6-4} = 6$		
6	24			

b) le polynôme d'interpolation peut donc s'écrire

$$p(x) = 2 + 2(x-1) + \frac{4}{3}(x-1)(x-3) - \frac{4}{15}(x-1)(x-3)(x-4)$$

c) la hauteur après 5 jours s'obtient par substitution

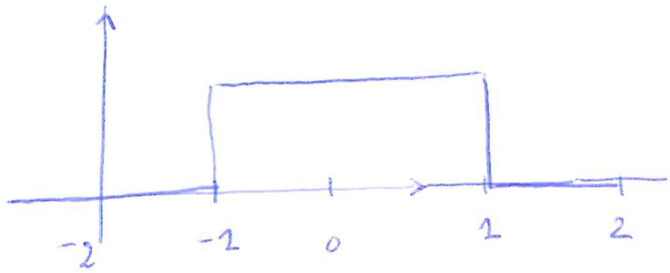
$$p(5) = 2 + 2(4) + \frac{4}{3}\cdot 4 \cdot 3 - \frac{4}{15}\cdot 4 \cdot 2 \cdot 1$$

Partie II

Question 2. 2

(a) la fonction est donnée par

on vous dit dans l'énoncé qu'elle est donnée sur sa période par



$$f(x) = \begin{cases} 0 & -2 \leq x \leq -1 \\ 1 & -1 < x < 1 \\ 0 & 1 \leq x \leq 2 \end{cases}$$

elle est donc de période $4 = 2-(-2)$

Examen ING1 - AGRO 2025 Session 01

Question 2. 2 (suite)

La série de Fourier (en utilisant la période obtenue au point précédent)

et en utilisant le fait que la fonction est paire ($f(x) = f(-x)$)

s'écrit $$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos\left(\frac{2\pi k x}{4}\right)$$

les coefficients sont donnés par

$$a_0 = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} 1 \, dx = 1$$

$$a_k = \frac{1}{2}\int_{-2}^{2} f(x) \cos\left(\frac{2\pi x}{4}\right) dx$$

$$= \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} \cos\left(\frac{2\pi x}{4}\right) dx$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{2\pi k} \left| \sin\left(\frac{2\pi x}{4}\right)\right|_{-1}^{1}$$

$$= \frac{1}{\pi k}\left(\sin\left(\frac{\pi k}{2}\right) - \sin\left(-\frac{\pi k}{2}\right)\right)$$

$$= \frac{2}{\pi k} \sin\left(\frac{k\pi}{2}\right)$$

on retrouve donc la série $$f(x) = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{\pi k} \sin\left(\frac{k\pi}{2}\right) \cos\left(\frac{2\pi k}{4} x\right)$$

Question 2.3 Deux fonctions $f(x)$ et $g(x)$ sont orthogonales sur un intervalle $[a, b]$ si $$\int_a^b f(x)\, \bar{g}(x)\, dx = 0$$

Examen ING 1 - AGRO 2025 Session 01

Question 2.3 (Suite)

(b) On a $\int_{-1}^{1} f(x)\,g(x)\,w(x)\,dx = \int_{-1}^{1} x\,(x^2 - 1/3)(1 - x^2)\,dx$

$$= \int_{-1}^{1} (x^3 - \frac{x}{3})(1 - x^2)\,dx$$

$$= \int_{-1}^{1} ((x^3 - \frac{x}{3}) - x^5 + \frac{x^3}{3})\,dx$$

$$= \left| \frac{x^4}{4} - \frac{x^2}{6} - \frac{x^6}{6} + \frac{x^4}{12} \right|_{-1}^{1}$$

$$= 0$$

c) il suffit de prendre par exemple $\tilde{f}(x) = f(x)\sqrt{w(x)}$ $\tilde{g}(x) = g(x)\sqrt{w(x)}$

d) Si $f(x)$ est paire on a $f(x) = f(-x)$

Si $g(x)$ est impaire on a $g(x) = -g(-x)$

Par conséquent, on a donc pour tout $a > 0$

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,g(x)\,dx = \int_{-a}^{0} -g(-x)\,f(-x)\,dx + \int_{0}^{a} f(x)\,g(x)\,dx$$

$$= \int_{a}^{0} g(x)\,f(x)\,dx + \int_{0}^{a} f(x)\,g(x)\,dx$$

$$= -\int_{0}^{a} g(x)\,f(x)\,dx + \int_{0}^{a} f(x)\,g(x)\,dx = 0$$